Sandra Maria Simões de Oliveira

Mestre em Estatística e Optimização

Delineamento regressional múltiplo para um factorial de base prima estritamente associado a uma álgebra de *Jordan* comutativa

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Estatística e Gestão do Risco

Orientadora: Doutora Elsa Estevão Fachadas Nunes Moreira
Investigadora do Centro de Matemática e Aplicações
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Co-orientador: Doutor Miguel dos Santos Fonseca
Investigador do Centro de Matemática e Aplicações
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Carlos Manuel Agra Coelho
Arguentes: Prof. Doutora Célia Maria Pinto Nunes
Prof. Doutora Teresa Paula Costa Azinheira Oliveira

Vogais: Prof. Doutor Carlos Alberto dos Santos Braumann
Prof. Doutor Carlos Manuel Agra Coelho
Prof. Doutor Dário Jorge da Conceição Ferreira
Prof. Doutora: Elsa Estevão Fachadas Nunes Moreira

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho 2018

Este texto não foi escrito ao abrigo do novo acordo ortográfico.

Copyright

AGRADECIMENTOS

A terminar esta tese de doutoramento resta-me agradecer a todos, que directa ou indirectamente, contribuíram para que esta se tornasse numa realidade.

O primeiro agradecimento é dirigido ao Professor João Tiago Mexia pelas oportunidades de aprendizagem que me tem proporcionado desde a licenciatura. Pela sua disponibilidade, pela partilha do saber, por tudo o que me ensinou. Pelas sugestões que, muito enriqueceram, não apenas este trabalho. Pelo apoio e incentivo. Sou muito grata.

À minha orientadora, Doutora Elsa Moreira, agradeço o seu apoio e orientação. A disponibilidade e paciência, com que ouviu as minhas incertezas e as minhas dúvidas. Além de uma orientadora uma Amiga!

Ao meu co-orientador, Doutor Miguel Fonseca, pelo apoio e orientação deste trabalho. Pela disponibilidade, pelo debate de ideias, pelas sugestões importantes para a realização desta tese e também pela sua amizade. Às palavras de ânimo que disse sempre que achou necessário.

Agradeço aos elementos que constituíram a Comissão de Acompanhamento de Tese: à Professora Doutora Sandra Nunes, ao Professor Doutor Dário Ferreira e ao Professor Doutor Ricardo Covas, pelas sugestões.

Agradeço ao coordenador do Programa Doutoral em Estatística e Gestão do Risco, Professor Doutor Manuel Esquível, pela sua disponibilidade, pelo apoio e incentivo, em especial na fase final da elaboração desta tese.

Agradeço a todos os meus Professores. À minha Professora da primária. Aos Professores do 1º ciclo, do 2º ciclo, e do secundário. Agradeço aos meus Professores da Licenciatura, do Mestrado e do Doutoramento. A todos agradeço o que me ensinaram.

Aos meus colegas e Amigos da ESCE agradeço as manifestações de apoio, de encorajamento e de amizade, principalmente nos momentos de maior cansaço. Em especial, agradeço à Sandra Nunes e à Sandra Monteiro pelas suas sugestões.

Agradeço a possibilidade de utilizar as instalações do Centro de Matemáticas e Aplicações (CMA) da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa durante o período da elaboração desta tese. Agradeço aos colegas e amigos que conheci no CMA. Agradeço o debate e a troca de ideias.

À minha família a minha eterna gratidão, sem a qual este percurso não faria sentido. Em especial, ao meus pais e aos meus filhos agradeço a compreensão pelas inúmeras ausências.

A todos o meu sincero agradecimento!

Este trabalho de investigação foi feito ao abrigo do Programa de Apoio à Formação Avançada de Docentes do Ensino Superior Politécnico de Setúbal. A elaboração desta tese beneficiou do regime de isenção de propinas de doutoramento, no âmbito do Protocolo de Cooperação existente entre a Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e o Instituto Politécnico de Setúbal.

Aos meus pais Valentim e Alzira

Aos meus filhos Inês e João

RESUMO

Quando para cada tratamento de um modelo base está definida uma regressão linear múltipla nas mesmas variáveis (dependente e explicativas) obtém-se um delineamento regressional múltiplo. O objectivo desta tese é desenvolver os delineamentos regressionais múltiplos associados a factoriais de base prima de efeitos fixos (factorial completo, confundimento e fraccionamento). A estrutura associada ao factorial de base prima assenta nos espaços lineares sobre *corpos de Galois* e na relação entre os modelos e álgebras de Jordan comutativas. Combinando esta abordagem com o Modelo-**L** é possível alargar o estudo, tanto do factorial, como do delineamento regressional múltiplo associado a um factorial, ao caso não equilibrado.

ABSTRACT

If to every treatment in a base model, a multiple linear regression is considered on the same variables (dependent and explanatory) a multiple regressional design is obtained. The purpose of this work is to develop the multiple regression designs associated to the prime basis factorial (full factorial, confounding and fractional cases). The structure associated to the prime basis factorial is based on the linear spaces on *Galois fields* and on the relationship between the models and commutative Jordan algebras. Combining this approach with the **L**-Model theory it is possible to extend the study of both the factorial and the multiple regressional design associated with a factorial to the unbalanced case.

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

DRM	delineamento regressional múltiplo
RLM	regressão linear múltipla
MPO	matriz de projecção ortogonal
$MPOMO$	matrizes de projecção ortogonal mutuamente ortgonais
$FMPOMO$	família de matrizes de projecção ortogonal mutuamente ortogonais
AJC	álgebra de *Jordan* comutativa
sub-AJC	sub-álgebra de *Jordan* comutativa
$BLUE$	*best linear unbiased estimator*
$UMVUE$	*uniformly minimum variance unbiased* estimator
$\mathcal{M}_n$	espaço linear das matrizes reais de ordem n
$\mathcal{S}_n$	espaço linear das matrizes reais simétricas de ordem n
$\mathcal{A}$	álgebra de *Jordan* comutativa $\mathcal{A}$
$bp\,(\mathcal{A})$	base principal da AJC $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}^\circ$	sub-álgebra de *Jordan* comutativa de $\mathcal{A}$
$\mathbf{U}$	elemento identidade da AJC $\mathcal{A}$
$\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'$	onde $\mathbf{1}_n$ é um vector de uns
$\mathbf{I}_n$	matriz identidade de ordem n
$\mathbf{A}'$	transposta da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^+$	inversa de *Moore-Penrose* da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	inversa da matriz $\mathbf{A}$
$car\,(\mathbf{A})$	característica da matriz $\mathbf{A}$
$\lvert\mathbf{A}\rvert$	determinante da matriz $\mathbf{A}$

$tr(\mathbf{A})$	traço da matriz $\mathbf{A}$
$R(\mathbf{A})$	espaço imagem da matriz $\mathbf{A}$
$N(\mathbf{A})$	espaço nulidade da matriz $\mathbf{A}$
$sp(a_1, ..., a_k)$	espaço linear $\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i : \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}$
$\mathbf{P}$	matriz ortogonal
$\bigoplus$	soma directa de subespaços lineares
$\boxplus$	soma directa de subespaços lineares ortogonais
$\otimes$	produto de Kronecker
$\star$	produto entre álgebras de *Jordan* comutativas
$G_{[p]}$	$\{0, 1, ..., p-1\}$
$G_{[p]}^N$	$\left\{(x_1, ..., x_N) : x_1, ..., x_N \in G_{[p]}\right\}$
$\mathcal{L}_{[p]}^N$	dual de $G_{[p]}^N$
$\mathcal{L}_{r[p]}^N$	família das aplicações lineares reduzidas de $\mathcal{L}_{[p]}^N$
$\mathcal{L}_1$	subespaço linear de $\mathcal{L}_{[p]}^N$
$\mathcal{L}_{1r}$	família das aplicações lineares reduzidas de $\mathcal{L}_1$
$O(\ell)$	ordem de uma aplicação linear reduzida
$\mathbb{E}(X)$	valor esperado da variável aleatória X
$\mathbb{V}(X)$	variância da variável aleatória X
$\mathbb{E}(\mathbf{X})$	valor esperado do vector aleatório $\mathbf{X}$
$\mathbb{V}(\mathbf{X})$	matriz de variâncias-covariâncias do vector aleatório $\mathbf{X}$
$\mathbb{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	matriz de covariâncias cruzadas dos vectores aleatórios $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$

CONTEÚDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1. INTRODUÇÃO

Quando para cada tratamento de um modelo base está definida um regressão linear múltipla (RLM) nas mesmas variáveis (dependente e explicativas) obtém-se um delineamento regressional múltiplo (DRM). Nestes modelos estuda-se a influência dos factores (do modelo base) em combinações lineares dos coeficientes de $RLM's$. Quando o número de observações por regressão é igual diz-se um DRM equilibrado. Caso contrário diz-se um DRM não equilibrado.

O conceito de DRM foi introduzido em [26]. Desde então foram realizados desenvolvimentos nos quais foram considerados como modelo base quadrados latinos e blocos casualizados [43], planos completos [12] e um factorial de base 2 [9]. Em [35] o modelo base considerado foi um One-Way de efeitos fixos onde se contemplaram situações de multicolinearidade e heterocedasticidade dos modelos de regressão linear múltipla, apresentando-se uma aplicação à remoção electrodialítica de metais pesados de resíduos de madeira tratada, ver [33] e [34]. Em [40] e [41] foi considerado, como modelo base, um factorial de base prima, completo, de efeitos fixos. Posteriormente, em [30]-[32], foi estudado um DRM não equilibrado tendo como modelo base um modelo linear com cruzamento-encaixe associado a uma álgebra de Jordan comutativa (AJC).

Nesta tese pretende-se continuar e desenvolver o trabalho realizado anteriormente em [40]-[41], onde foi considerado um DRM com modelo base um factorial de base prima (completo), de efeitos fixos e equilibrado. Considera-se agora, relativamente ao modelo base, além do caso completo, também o confundimento e o fraccionamento de um factorial de base prima, de efeitos fixos. Considera-se também o factorial enquadrado na classe dos modelos lineares estritamente associados a uma AJC, ver [15], [16] e [17]. Uma das vantagens desta abordagem é a possibilidade de construir modelos base complexos a partir de outros mais simples utilizando operações definidas sobre as $AJC's$ associadas aos modelos. Outra vantagem é obter $UMVUE$'s (do inglês "*uniformly minimum variance unbiased estimator*") para os parâmetros do modelo base quando se admite a hipótese da normalidade dos erros. Nesta tese mostra-se que é possível alargar o estudo, tanto do factorial (completo, confundimento e replicação fraccionária), como do DRM associado a um factorial, ao caso não equilibrado, combinando a teoria do modelo-**L** introduzida em [30]-[31] e a relação entre um modelo linear e uma AJC, [14]-[16].

Além deste capítulo introdutório (Capítulo 1-Introdução) e do último capítulo (Capítulo 6-Conclusões e trabalho futuro) esta tese inclui mais 4 capítulos. No capítulo 2 apresentam-se instrumentos de Álgebra Linear necessários para melhor compreender a estrutura dos modelos que são objecto desta tese. É feita uma exposição sobre as estruturas que são utilizadas na formulação de um modelo linear ortogonal, os espaços lineares de matrizes simétricas que comutam e que contêm o quadrado de cada uma das suas matrizes, ou seja, as $AJC's$ de matrizes simétricas, também conhecidos por subespaços quadráticos, ver [22], [42] e [48]. Sobre essas álgebras são definidas operações que permitem obter modelos lineares ortogonais complexos a partir de modelos lineares ortogonais mais simples.

No capítulo 3 é apresentada a estrutura algébrica do modelo linear, de efeitos fixos, estritamente associado a uma AJC e a forma como está relacionado com essa AJC, ver [14]. O modelo é apresentado na forma canónica que assenta na base principal da AJC. Com esta abordagem e assumindo a hipótese de normalidade obtêm-se estatísticas suficientes e completas que permitem obter *UMVUE's* para os parâmetros do modelo. Utilizando as operações definidas no capítulo 2 é possível construir modelos lineares associados a uma AJC complexos a partir de modelos lineares associados a uma AJC mais simples por cruzamento e por encaixe, ver [14], [15], [16] e [17].

No capítulo 4 é estudada a estrutura do modelo base do DRM: o factorial de base prima de efeitos fixos (completo, confundimento e fraccionamento). A estrutura destes modelos assenta em espaços lineares sobre corpos de *Galois* (utilizada em [40] e [41] e mais tarde também em [15]-[17]) e na relação entre o modelo linear ortogonal e uma AJC ([15], [16]-[17]).

O capítulo 5 é dedicado ao desenvolvimento dos $DRM's$ associados aos factoriais de base prima (completo, confundimento e fraccionamento). Como num factorial de base prima, também num DRM associado a um factorial de base prima, testam-se hipóteses sobre a ausência dos efeitos principais e ausência de interacções factoriais, mas em combinações lineares dos coeficientes das regressões. O desenvolvimento proposto consiste em alargar o estudo do factorial de base prima e do DRM associado a um factorial de base prima ao caso não equilibrado (quando o número de observações por tratamento/regressão pode não ser igual). Mostra-se que utilizando a teoria do Modelo-**L** ([30], [32], [10] e [11]) esta situação pode ser considerada. Assumindo a hipótese da normalidade dos erros obtêm-se *UMVUE's* para os parâmetros dos modelos referidos. Mostra-se também, que a um DRM equilibrado aplica-se o teste simultâneo para a igualdade de valores médios e esfericidade da matriz de covariâncias [3] trabalho que teve como ponto de partida resultados enunciados em [4].

São apresentados 5 anexos onde se apresenta um resumo de algumas ferramentas algébricas (Anexo A) e estatísticas (Anexos B, C e D) necessárias ao desenvolvimento desta tese. O Anexo E contém resultados úteis a exemplos que são apresentados ao longo desta tese e o Anexo F resultados utilizados na secção 5.3.

2. ÁLGEBRA DE JORDAN COMUTATIVA

As álgebras de Jordan foram introduzidas por Pascual Jordan, John von Neumman e Eugene P. Wigner, ver [18], para permitir uma reformulação algébrica da mecânica quântica. Mais tarde foram utilizadas por Seely em estatística, ver [46]-[50], nomeadamente em problemas de estimação, de modo a obter $UMVUE$'s. Estes temas têm sido desenvolvidos e aprofundados por outros autores, ver por exemplo [27] e [28]. Nesta tese é dada especial atenção aos espaços lineares de matrizes reais simétricas que comutam e contêm os quadrados das suas matrizes, ou seja, álgebras de Jordan comutativas de matrizes simétricas, também conhecidos por subespaços quadráticos, ver [42], [46] e [48]. Estes espaços têm um papel central na formulação do modelo linear estritamente associado a uma AJC, ver [14], que é estudado no capítulo 3. No presente capítulo apresentam-se resultados, cuja inclusão se considerou pertinente, dada a sua importância na formulação dos referidos modelos. As demonstrações dos resultados, das secções 2.1 e 2.2, não foram incluídas por não serem essenciais em desenvolvimentos seguintes. Podem ser consultadas, por exemplo, em [7], [8], [14], [22], [45], [48] ou [52].

2.1 Álgebra de Jordan comutativa

Definição 1. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é um espaço linear munido com uma operação binária $*$, geralmente designada por multiplicação, que verifica as seguintes propriedades, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{A}$,*

1. $\mathbf{a} * (\mathbf{b} + \boldsymbol{c}) = \mathbf{a} * \mathbf{b} + \mathbf{a} * \mathbf{c}$,

2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) * \mathbf{c} = \mathbf{a} * \boldsymbol{c} + \mathbf{b} * \mathbf{c}$,

3. $\alpha(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) * \mathbf{b} = \mathbf{a} * (\alpha\mathbf{b})$.

Não é necessário a operação $*$ ser associativa nem comutativa para que o espaço linear seja uma álgebra.

Exemplo 1. *Seja $\mathcal{M}_n$ a família das matrizes reais de ordem n. É evidente que esta família com as operações usuais de adição, produto por um escalar e multiplicação de matrizes é uma álgebra, verificando-se*

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{BC}\right) = \left(\mathbf{AB}\right)\mathbf{C}, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_n$$

mas em geral, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Definição 2. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{S}$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{A}$ se*

- *é um subespaço linear de $\mathcal{A}$,*
- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{S} : \mathbf{a} * \mathbf{b} \in \mathcal{S}$.

Definição 3. *Uma álgebra de Jordan é uma álgebra (espaço vectorial munido com uma multiplicação) munida de um produto $\circ$, designado por produto de Jordan, que satisfaz as seguintes condições, para todo* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$

1. $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$,

2. $\mathbf{a}^{2\cdot} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{a}) = (\mathbf{a}^{2\cdot} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{a}$,

onde $\mathbf{a}^{2\cdot} = \mathbf{a} \circ \mathbf{a}$.

Definição 4. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Jordan e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{S}$ é uma sub-álgebra de Jordan de $\mathcal{A}$ se*

- *é uma sub-álgebra de $\mathcal{A}$,*
- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{S} : \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \in \mathcal{S}$.

Exemplo 2. *Considere-se $\mathcal{S}_n$ a família das matrizes reais simétricas de ordem n. Esta família munida da adição e produto por um escalar é um espaço linear. Se o produto $\circ$ for definido por*

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{BA})$$

onde $\mathbf{AB}$ representa o produto usual de matrizes, verifica-se que $\circ$ é um produto de Jordan e que $\mathcal{S}_n$ é uma álgebra de Jordan.

Definição 5. *Seja $\mathcal{S}$ um subespaço linear de $\mathcal{M}_n$. O elemento $\mathbf{E} \in \mathcal{S}$ é um elemento identidade se $\mathbf{ES} = \mathbf{SE} = \mathbf{S}, \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$.*

Note-se que se $\mathcal{S}$ for um subespaço de $\mathcal{M}_n$ o elemento identidade não é necessariamente a matriz $\mathbf{I}_n$, como se verá mais à frente.

Definição 6. *Um elemento $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_n$, tal que, $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$, diz-se um elemento idempotente.*

As álgebras contidas em $\mathcal{S}_n$ desempenham um papel fundamental nesta tese dado estarem relacionadas com os modelos que serão considerados. De forma a realçar a importância destes espaços são apresentados mais alguns resultados. Entre eles caracterizações alternativas de álgebras de Jordan.

Teorema 1. *Seja $\mathcal{S}$ um subespaço linear de $\mathcal{S}_n$ com elemento identidade $\mathbf{E}$. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ elementos arbitrários de $\mathcal{S}$. Então $\mathcal{S}$ é uma álgebra de Jordan se e só se as seguintes condições equivalentes se verificarem:*

1. $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} \in \mathcal{S}$,

2. $\mathbf{ABA} \in \mathcal{S}$,

3. $\mathbf{ABC} + \mathbf{CBA} \in \mathcal{S}$,

4. $\mathbf{A}^2 \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Ver [22], [53]. □

Pelas segunda e quarta condições do Teorema 1 verifica-se facilmente que uma álgebra de *Jordan* contém qualquer potência de cada uma das suas matrizes.

Daqui em diante consideram-se apenas álgebras de *Jordan* constituídas por matrizes reais simétricas, de ordem n, que comutam. Nestas estruturas, como facilmente se verifica, o produto de *Jordan* reduz-se ao produto usual de matrizes. Neste contexto tem-se a seguinte definição.

Definição 7. *Um espaço linear de matrizes reais simétricas, $\mathcal{A}$, é uma álgebra de Jordan comutativa (AJC) se*

- *$\mathcal{A}$ é uma álgebra de Jordan,*
- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, *para quaisquer* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B} \in \mathcal{A}$.

O Teorema 2 tem um papel fulcral no decorrer desta dissertação.

Teorema 2. (*Seely*, 1971) *Uma condição necessária e suficiente para que um subespaço $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_n$ seja uma AJC é a existência de uma base, $\{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$ para $\mathcal{S}$, constituída por matrizes idempotentes, tais que, $\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j = \mathbf{0}$ para $i \neq j, i, j = 1, ..., m$. Esta base é única.*

Demonstração. Ver [48]. □

A base identificada no Teorema 2 designa-se por base principal da *AJC* $\mathcal{A}$ e representa-se por $bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$. Como as matrizes de $bp(\mathcal{A})$ são simétricas e idempotentes são matrizes de projecção ortogonal ($MPO's$), ver anexo A.1. Além disso são mutuamente ortogonais, pois $\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j = \mathbf{0}$, para $i \neq j$ e $i, j = 1, ..., m$. Assim $bp(\mathcal{A})$ é uma família de matrizes de projecção ortogonal mutuamente ortogonais, abreviadamente $FMPOMO$.

Seja então $\mathcal{A}$ uma AJC e $bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$ a sua base principal. Para cada matriz $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$ tem-se que

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{Q}_j$$

e o seu espaço imagem pode ser escrito como

$$R(\mathbf{M}) = \underset{j \in \mathcal{C}(\mathbf{M})}{\boxplus} R(\mathbf{Q}_j)$$

onde $\mathcal{C}(\mathbf{M}) = \{j : c_j \neq 0\}$ e $\boxplus$ representa a soma directa de subespaços lineares mutuamente ortogonais. Consequentemente a matriz de projecção ortogonal sobre $R(\mathbf{M})$ é

$$\mathbf{Q} = \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{M})} \mathbf{Q}_j$$

e a característica da matriz $\mathbf{M}$ é

$$car(\mathbf{M}) = \sum_{j \in \mathcal{C}(\mathbf{M})} g_j$$

onde $g_j = car(\mathbf{Q}_j), j = 1, ..., m$. Do exposto verifica-se facilmente que se $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$ for uma MPO é soma de todas ou de parte das matrizes da base principal. Além disso, se $car(\mathbf{M}) = 1$, então $\mathbf{M} \in bp(\mathcal{A})$.

Definição 8. *Seja $\mathcal{A}$ uma AJC, com base principal $bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$. Diz-se que $\mathcal{A}$ é completa se $\sum_{j=1}^{m} \mathbf{Q}_j = \mathbf{I}_n$.*

Seja $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n'$ uma matriz quadrada, de ordem n, com elementos iguais a 1.

Definição 9. *Seja $\mathcal{A}$ uma AJC com base principal $bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$. Diz-se que $\mathcal{A}$ é regular se $\frac{1}{n}\mathbf{J}_n \in \mathcal{A}$.*

Como $\frac{1}{n}\mathbf{J}_n$ é uma MPO e tem característica 1, logo $\frac{1}{n}\mathbf{J}_n \in bp(\mathcal{A})$. Numa AJC regular as matrizes da base principal podem ser ordenadas de forma a ter-se que $\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{n}\mathbf{J}_n$.

Exemplo 3. *Um dos exemplos mais simples de uma AJC completa e regular é a álgebra que tem a base principal $\left\{\frac{1}{n}\mathbf{J}_n, \mathbf{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{J}_n\right\}$.*

O Teorema seguinte fornece condições equivalentes para que uma AJC seja completa.

Teorema 3. *Dada uma AJC, $\mathcal{A}$, com base principal $bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$, as seguintes condições são equivalentes.*

1. *$\mathcal{A}$ é completa,*
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \mathbf{Q}_j = \mathbf{I}_n,$
3. $car\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \mathbf{Q}_j\right) = n,$
4. $\boxplus_{j=1}^{m} R(\mathbf{Q}_j) = \mathbb{R}^n.$

Apesar da existência de matrizes regulares estar condicionada ao facto de a AJC ser completa, como se verá de seguida, essa questão não se coloca no caso da inversa de *Moore-Penrose* (ver anexo A.3), caso especial das inversas generalizadas. Continua-se a considerar $bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$ a base principal da AJC $\mathcal{A}$ e $\mathbf{M} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j\mathbf{Q}_j \in \mathcal{A}$. Como $bp(\mathcal{A})$ é uma $FMPOMO$ verifica-se que a matriz

$$\mathbf{M}^+ = \sum_{j=1}^{m} c_j^+\mathbf{Q}_j, \tag{2.1}$$

com

$$c_j^+ = \begin{cases} c_j^{-1}, & c_j \neq 0 \\ 0, & c_j = 0 \end{cases}$$

verifica as condições da Definição 32 (Anexo A.3), pelo que, $\mathbf{M}^+$ é a inversa de *Moore-Penrose* da matriz $\mathbf{M}$. Como $\mathbf{M}^+ \in \mathcal{A}$ conclui-se que uma *AJC* contém a inversa de *Moore-Penrose* de cada uma das suas matrizes. Seja a matriz

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Q}_j.$$

Utilizando novamente o facto de $bp(\mathcal{A})$ ser uma *FMPOMO* tem-se que $\mathbf{U}$ é uma *MPO* e para qualquer matriz $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$ verifica-se que

$$\mathbf{UM} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Q}_j \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{Q}_j \right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{Q}_j = \mathbf{M} = \mathbf{MU},$$

ou seja, a matriz $\mathbf{U}$ é o elemento identidade de $\mathcal{A}$. Assim, numa *AJC* o elemento identidade não é necessariamente a matriz $\mathbf{I}_n$. Pelo Teorema 3, numa *AJC* $\mathcal{A}$, $\mathbf{U} = \mathbf{I}_n$ se e só se $car(\mathbf{U}) = n$. Se $car(\mathbf{U}) < n$, $R(\mathbf{U})$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$. Como a matriz $\mathbf{Q}_{m+1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{U}$ é uma *MPO*, ortogonal às matrizes $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m$, se a *AJC* $\mathcal{A}$ não é completa é possível obter uma *AJC* completa, que se representa por $\overline{\mathcal{A}}$, cuja base principal é $bp\left(\overline{\mathcal{A}}\right) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_{m+1}\}$. Verifica-se também que,

$$\mathbf{MM}^+ = \mathbf{M}^+\mathbf{M} = \mathbf{U}$$

se e só se $c_j \neq 0$, para todo o $j = 1, ..., m$. Se a matriz $\mathbf{M}$ for regular a sua inversa existe, $\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^{-1}$ e

$$\mathbf{MM}^+ = \mathbf{MM}^{-1} = \mathbf{I}_n = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Q}_j.$$

Consequentemente,

Teorema 4. *Seja $\mathcal{A}$ uma AJC. $\mathcal{A}$ é completa se e só se contém uma matriz regular.*

Se $\mathcal{A}$ for uma AJC completa então

$$\mathbf{I}_n = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Q}_j = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{A}_j \mathbf{A}_j' = \mathbf{P}\mathbf{P}'$$

onde $\mathbf{A}_j, j = 1, ..., m$ são matrizes cujos vectores coluna constituem bases ortonormadas para os subespaços lineares $R(\mathbf{Q}_j), j = 1, ..., m$ (ver anexo A.1) e

$$\mathbf{P} = [\mathbf{A}_1 ... \mathbf{A}_m]$$

é uma matriz ortogonal. Se a AJC $\mathcal{A}$ também for regular, pode considerar-se, $\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{n}\mathbf{J}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n\right)'$, com $\mathbf{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n$ e os elementos da primeira coluna da matriz $\mathbf{P}$ são iguais a $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Note-se que, apesar das matrizes $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m$ serem únicas, nem as matrizes $\mathbf{A}_1, ...\mathbf{A}_m$ nem a matriz $\mathbf{P}$ são únicas. Para cada $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$ verifica-se que

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{Q}_j = \sum_{i=1}^{m} c_j \mathbf{A}_j \mathbf{A}_j'$$

logo $\mathbf{P}$ diagonaliza $\mathbf{M}$ e os coeficientes $c_j, j = 1, ..., m$ correspondem aos valores próprios distintos da matriz $\mathbf{M}$ que têm multiplicidades

$$g_j = car(\mathbf{Q}_j) = car(\mathbf{A}_j), j = 1, ..., m.$$

Verifica-se também que se $\mathcal{A}$ é completa

$$|\mathbf{M}| = \prod_{j=1}^{m} c_j^{g_j}$$

e a matriz $\mathbf{M}$ é definida positiva (regular) se e só se os coeficientes c_j são positivos (não nulos), ver [45] .

2.2 Álgebra de Jordan comutativa obtida de uma família de matrizes simétricas que comutam

Nesta secção expõe-se um método para determinar a base principal e a respectiva AJC a partir de uma família de matrizes simétricas que comutam. As demonstrações dos resultados desta secção não são apresentadas pelo motivo já referido no início deste capítulo podendo ser consultadas em [7], por exemplo.

Sejam $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_1, ..., \mathbf{M}_w\}$ uma famíla de matrizes reais simétricas, de ordem n, que comutam e $sp(\mathcal{M})$ o espaço gerado por $\mathcal{M}$. Então, existe uma matriz $\mathbf{P}$ ortogonal (não única) ver [45] , tal que, para cada $i = 1, .., w$, $\mathbf{D}_i = \mathbf{P}'\mathbf{M}_i\mathbf{P}$, com $\mathbf{D}_i$ uma matriz diagonal cujos elementos principais são os valores próprios de $\mathbf{M}_i$ e os vectores coluna de $\mathbf{P}$ os vectores próprios das matrizes $\mathbf{M}_i$.

Definição 10. *Seja $\mathcal{A}$ uma AJC. Uma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ que diagonaliza todas as matrizes em $\mathcal{A}$ diz-se uma diagonalizadora ortogonal de $\mathcal{A}$.*

Considere-se $\mathbf{P}$ uma matriz ortogonal arbitrária fixa e $\mathcal{A}_\mathbf{P}$ a família de todas as matrizes simétricas diagonalizáveis por $\mathbf{P}$. Obviamente que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_\mathbf{P}$ e

Teorema 5. *A família $\mathcal{A}_\mathbf{P}$ é uma AJC.*

Demonstração. Ver [7]. □

Como $\mathbf{I}_n \in \mathcal{A}_\mathbf{P}$, $\mathcal{A}_\mathbf{P}$ é uma AJC completa. Dado que a intersecção de $AJC's$ é uma AJC segue a definição seguinte,

Definição 11. *Dada uma família $\mathcal{M}$ de matrizes simétricas que comutam, diz-se que a AJC que contém $\mathcal{M}$ e que está contida em todas as $AJC's$ que contêm $\mathcal{M}$, é a AJC gerada por $\mathcal{M}$.*

A AJC gerada por $\mathcal{M}$ é a intersecção de todas as AJC que contêm $\mathcal{M}$ e representa-se esta AJC por $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. Obviamente que

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{P}}.$$

Sendo $\lambda_{i1}, ..., \lambda_{in}$ os valores próprios da matriz $\mathbf{M}_i$ a decomposição espectral é dada por

$$\mathbf{M}_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j'$$

onde $\mathbf{x}_j$ é o vector próprio ortonormado associado a λ_{ij}. Considerando $\lambda_{ij} = \mathbf{x}_j' \mathbf{M}_i \mathbf{x}_j$ pode-se definir uma relação de equivalência τ, tal que, dois vectores próprios estão τ-relacionados quando estão associados a valores próprios idênticos para todas as matrizes de $\mathcal{M}$. Formalmente, para $j, j' = 1, ..., n$

Definição 12. $\mathbf{x}_j \tau \mathbf{x}_{j'}$ *se e só se* $\mathbf{x}_j' \mathbf{M}_i \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j'}' \mathbf{M}_i \mathbf{x}_{j'}, \forall i \in \{1, ..., w\}$.

As classes de equivalência definidas por τ podem ser de dois tipos. Quando existe pelo menos uma matriz em $\mathcal{M}$ com um valor próprio, não nulo, associado aos elementos da classe diz-se que a classe é primária. A classe é secundária (se existir, existe no máximo uma classe secundária) se todas as matrizes de $\mathcal{M}$ têm valores próprios nulos associados aos vectores da classe, ou seja,

Definição 13. *Dado um vector* $\mathbf{x}$ *de uma determinada classe de equivalência*

1. *Se* $\mathbf{x}' \mathbf{M}_i \mathbf{x} \neq 0$ *para alguma matriz em* $\mathcal{M}$ *a classe de equivalência é primária.*

2. *Se* $\mathbf{x}' \mathbf{M}_i \mathbf{x} = 0$ *para todas as matrizes em* $\mathcal{M}$ *a classe de equivalência é secundária.*

Supondo que existem m classes primárias é possível construir as matrizes $\mathbf{A}_j, i = 1, ..., j$, associadas às classes primárias, cujos vectores coluna são os vectores de cada uma dessas classes e considerar uma matriz $\mathbf{A}_{m+1}$ cujos vectores coluna são os vectores da classe de equivalência secundária, se esta existir. A família das matrizes

$$\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_j', j = 1, ..., m$$

é uma $FMPOMO$ e constitui a base principal da AJC

$$\mathcal{A} = sp\left(\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\right).$$

Independentemente da escolha das matrizes $\mathbf{A}_j, j = 1, ..., m$, a família $\{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$ é única, verificando-se

Teorema 6. $\mathcal{A} = \mathcal{A}\left(\mathcal{M}\right).$

Demonstração. Ver [7]. □

Como a soma das matrizes da base principal é a matriz identidade se e só se não existir uma classe de equivalência τ secundária, prova-se que

Teorema 7. $\mathcal{A}\left(\mathcal{M}\right) = \mathcal{A}\left(sp\left(\mathcal{M}\right)\right).$

Demonstração. Ver [7]. □

E assim

$$\mathcal{M} \subseteq sp\left(\mathcal{M}\right) \subseteq \mathcal{A}\left(sp\left(\mathcal{M}\right)\right) = \mathcal{A}\left(\mathcal{M}\right) \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{P}}. \tag{2.2}$$

Assumindo que a família $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_1, ..., \mathbf{M}_w\}$ é constituída por matrizes linearmente independentes e tendo em conta (2.2) tem-se que $dim\left(sp\left(\mathcal{M}\right)\right) = w$ e assim $w \leq m = dim\left(\mathcal{A}\right).$

Teorema 8. *Verifica-se que* $sp\left(\mathcal{M}\right) = \mathcal{A}$ *se se verificam uma das duas condições equivalentes*

1. *$\mathcal{M}$ é uma família de matrizes reais simétricas linearmente independente, tais que, $w = m$, ou*

2. *$sp(\mathcal{M})$ contém uma fmpomo com w matrizes.*

Demonstração. Ver [7]. □

Teorema 9. *A AJC, $\mathcal{A}_{\mathbf{P}}$, é maximal em termos de inclusão.*

Demonstração. Ver [7]. □

Apresenta-se um exemplo de uma AJC obtida de uma família de matrizes simétricas que comutam. Como se verá em secções e capítulos seguintes esta AJC desempenha um papel importante na formulação dos modelos que são apresentados nesta tese.

Exemplo 4. *Seja a família $\mathcal{M}_r = \{\mathbf{J}_r, \mathbf{I}_r\}$. Esta família é constituída por matrizes simétricas, linearmente independentes e que comutam. Uma possível diagonalizadora ortogonal de $\mathbf{J}_r$, e obviamente da matriz $\mathbf{I}_r$ também, será uma matriz cujos vectores coluna são vectores próprios ortonormados associados aos seus valores próprios $\lambda_1 = r$ (com multiplicidade igual a 1) e $\lambda_2 = 0$ (com multiplicidade igual a $r-1$). Aplicando a definição 12 obtém-se a matriz $\mathbf{P} = [\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2]$, onde $\mathbf{A}_j, j = 1, 2$ são matrizes cujas colunas são constituídas pelos vectores de cada uma das classes primárias. Destas matrizes determinam-se as matrizes da base principal da AJC $\mathcal{A} = sp(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$, dadas por $\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_j'$, $j = 1, 2$ obtendo-se $bp(\mathcal{A}) = \left\{\frac{1}{r}\mathbf{J}_r, \mathbf{I}_r - \frac{1}{r}\mathbf{J}_r\right\}$. Como as matrizes da família $\mathcal{M}$ são linearmente independente tem-se que $sp(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$ também é uma base para esta AJC. É usual representar-se esta AJC por $\mathcal{A}(r)$.*

2.3 Operações binárias definidas numa álgebra de Jordan comutativa

Definição 14. *Sejam as famílias de matrizes* $\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{M}_{1i}, i = 1, ..., m_1\}$ *e* $\mathcal{M}_2 = \{\mathbf{M}_{2j}, j = 1, ..., m_2\}$ *, constituídas por matrizes do tipo* $n \times m$ *e* $p \times q$*, respectivamente. Define-se o produto de Kronecker entre estas duas famílias por*

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = \{\mathbf{M}_{1i} \otimes \mathbf{M}_{2j}, i = 1, ..., m_1, j = 1, ..., m_2\}$$

onde $\mathbf{M}_{1i} \otimes \mathbf{M}_{2j}$ *representa o produto de Kronecker das matrizes* $\mathbf{M}_{1i}$ *e* $\mathbf{M}_{2j}$*, (ver Anexo A.2).*

O produto de *Kronecker* entre duas famílias de matrizes verifica determinadas propriedades sendo apresentadas de seguida algumas delas. Verificam-se facilmente recorrendo às propriedades do produto de Kronecker para matrizes (ver Anexo A.2).

1. Sejam $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ e $\mathcal{M}_3$ famílias de matrizes do tipo $n \times m$ e $p \times q$ e $r \times s$, respectivamente. Tem-se $(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_1 \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3)$.

2. Sejam $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ famílias de matrizes de ordem n e m, respectivamente.

   (a) Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são famílias de matrizes que comutam, então $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ também é uma família de matrizes que comutam.

   (b) Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são famílias de matrizes simétricas então $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ também é uma família de matrizes simétricas.

   (c) Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são famílias de MPO então $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ também é uma família de MPO.

   (d) Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são $FMPOMO$, então $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ também é uma $FMPOMO$.

Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ $AJC's$, constituídas por matrizes de ordens n_1 e n_2, respectivamente. Sejam $bp(\mathcal{A}_1) = \{\mathbf{Q}_{11}, ..., \mathbf{Q}_{1m_1}\}$ e $bp(\mathcal{A}_2) = \{\mathbf{Q}_{21}, ..., \mathbf{Q}_{2m_2}\}$. Considerando as famílias de matrizes, de ordem $n = n_1 n_2$,

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{ij} \left(\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{2j} \right), \ \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \ para \ i = 1, ..., m_1, \ j = 1, ..., m_2 \right\}$$

e

$$bp(\mathcal{A}_1) \otimes bp(\mathcal{A}_2) = \{\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{2j}, \ i = 1, ..., m_1, \ j = 1, ..., m_2\}$$

verifica-se o Teorema seguinte.

Teorema 10. *A família $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ é uma AJC e $bp(\mathcal{A}_1) \otimes bp(\mathcal{A}_2)$ é a sua base principal.*

Demonstração. Atententendo às propriedades do produto de *Kronecker* para matrizes e ao facto de as matrizes $\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{2j}$ serem $MPOMO$ verifica-se que a família $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ é constituída por matrizes simétricas, tem elemento identidade $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{2j})$ e contém o quadrado de qualquer uma das suas matrizes, assim pelo Teorema 1 é uma álgebra de Jordan. Como as matrizes da referida família comutam logo $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ é uma AJC. Dado que as matrizes $\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{2j}$ são $MPOMO$, são linearmente independentes e por isso são uma base para $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Pelo Teorema 2 constituem a base principal da ajc $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

□

Para representar a base principal da AJC $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ utiliza-se $bp(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ em vez de $bp(\mathcal{A}_1) \otimes bp(\mathcal{A}_2)$.

Corolário 1. *Se as $AJC's$ $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ forem completas [regulares] a AJC $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ é completa [regular].*

Demonstração. Supondo que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são $AJC's$ completas tem-se que $\sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{Q}_{1i} = \mathbf{I}_{n_1}$ e $\sum_{j=1}^{m_2} \mathbf{Q}_{2j} = \mathbf{I}_{n_2}$. Atendendo às propriedades do produto de *Kronecker*

$$\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{2j}) = \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{I}_{n_2} = \mathbf{I}_{n_1 n_2},$$

ou seja, $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ é uma AJC completa. Admitindo que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são $AJC's$ regulares, $\mathbf{Q}_{11} = \frac{1}{n_1} J_{n_1}$ e $\mathbf{Q}_{21} = \frac{1}{n_2} J_{n_2}$, pelo que, $\mathbf{Q}_{11} \otimes \mathbf{Q}_{21} = \frac{1}{n_1 n_2} \mathbf{J}_{n_1 n_2} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, concluindo-se que $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ é regular. $\square$

Sejam $\mathbf{P}(\mathcal{A}_1) = [\mathbf{A}_{11} \ ... \ \mathbf{A}_{1m_1}]$ e $\mathbf{P}(\mathcal{A}_2) = [\mathbf{A}_{21} \ ... \ \mathbf{A}_{2m_2}]$ diagonalizadoras ortogonais das $AJC's$ completas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente. Então

Teorema 11. *Uma diagonalizadora ortogonal da* AJC *completa* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, *que se representa por* $\mathbf{P}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, *é dada por*

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) = \mathbf{P}(\mathcal{A}_1) \otimes \mathbf{P}(\mathcal{A}_1).$$

Demonstração. Pelo teorema 10 a base principal da AJC $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ é constituída pelas matrizes

$$\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{2j} = (\mathbf{A}_{1i}\mathbf{A}'_{1i}) \otimes \left(\mathbf{A}_{2j}\mathbf{A}'_{2j}\right) = (\mathbf{A}_{1i} \otimes \mathbf{A}_{2j})(\mathbf{A}_{1i} \otimes \mathbf{A}_{2j})'$$

com $i = 1, ..., m_1$ e $j = 1, ..., m_2$, pelo que,

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) = [\mathbf{A}_{11} \otimes \mathbf{A}_{21} \ldots \mathbf{A}_{1m_1} \otimes \mathbf{A}_{2m_2}] = \mathbf{P}(\mathcal{A}_1) \otimes \mathbf{P}(\mathcal{A}_2).$$

$\square$

Como o produto de *Kronecker* é associativo verifica-se que, dadas as AJC's $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$,

$$\mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3) = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3$$

ver [14].

Seja

$$\mathbf{U}_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{Q}_{1i}$$

o elemento identidade da AJC $\mathcal{A}_1$.

Teorema 12. *A família*

$$\{\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{21}, i = 1, ..., m_1\} \cup \{\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{Q}_{2j}, j = 2, ..., m_2\} \tag{2.3}$$

é uma $FMPOMO$.

Demonstração. Como o produto de *Kronecker* de $MPO's$ é uma MPO, então (2.3) é uma $FMPOMO$. Como as matrizes das famílias $bp\,(\mathcal{A}_1)$ e $bp\,(\mathcal{A}_2)$ são mutuamente ortogonais,

- $(\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{21})\,(\mathbf{Q}_{1i'} \otimes \mathbf{Q}_{21}) = \mathbf{0}_{n_1 n_2},\ i \neq i', i' = 1, ..., m_1$
- $(\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{Q}_{2j})\,(\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{Q}_{2j'}) = \mathbf{0}_{n_1 n_2},\ j \neq j', j' = 1, ..., m_2$
- $(\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{21})\,(\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{Q}_{2j}) = \mathbf{0}_{n_1 n_2},\ i = 1, ..., m_1,\ j = 2, ..., m_2$

então (2.3) é uma $FMPOMO$. □

Definição 15. *Define-se o produto $\star$ entre as $AJC's$ $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ como a AJC $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ cuja base principal é*

$$bp\,(\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2) = \{\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{21}, i = 1, ..., m_1\} \cup \{\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{Q}_{2j}, j = 2, ..., m_2\}.$$

Em particular, se as $AJC's$ $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ forem completas e regulares, a base principal da AJC $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ é

$$bp\,(\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2) = \left\{\frac{1}{n_1}\mathbf{J}_{n_1} \otimes \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2}, ..., \mathbf{Q}_{1m_1} \otimes \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2}\right\} \cup \{\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{Q}_{2j}, j = 2, ..., m_2\}.$$

Assim,

Corolário 2. *Se as AJC's* $\mathcal{A}_1$ *e* $\mathcal{A}_2$ *forem completas [regulares] a AJC* $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ *é completa [regular].*

Demonstração. Admitindo que as *AJC's* $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são completas tem-se $\sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{Q}_{1i} = \mathbf{I}_{n_1}$ e $\sum_{j=1}^{m_2} \mathbf{Q}_{2j} = \mathbf{I}_{n_2}$. Atendendo às propriedades do produto de *Kronecker*

$$\sum_{i=1}^{m_1} (\mathbf{Q}_{1i} \otimes \mathbf{Q}_{21}) + \sum_{j=2}^{m_2} (\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{Q}_{2j}) = \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{Q}_{21} + \mathbf{I}_{n_1} \otimes \sum_{j=2}^{m_2} \mathbf{Q}_{2j} = \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{I}_{n_2} = \mathbf{I}_{n_1 n_2}$$

ou seja, $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ *é uma AJC completa. Se as AJC's* $\mathcal{A}_1$ *e* $\mathcal{A}_2$ *forem regulares,* $\frac{1}{n_1}\mathbf{J}_{n_1} \otimes \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2} = \frac{1}{n_1 n_2}\mathbf{J}_{n_1 n_2} \in \mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ *o que significa que* $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ *é uma AJC regular.* □

Teorema 13. *Sejam* $\mathbf{P}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{n_1}}\mathbf{1}_{n_1}\ \mathbf{A}_{12}\ ...\ \mathbf{A}_{1m_1}\right]$ *e* $\mathbf{P}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{n_2}}\mathbf{1}_{n_2}\ \mathbf{A}_{22}\ ...\ \mathbf{A}_{2m_2}\right]$ *diagonalizadoras ortogonais das AJC's completas e regulares* $\mathcal{A}_1$ *e* $\mathcal{A}_2$*, respectivamente. Então uma diagonalizadora ortogonal da AJC completa e regular* $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ *é a matriz*

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2) = \left[\frac{1}{\sqrt{n_1}}\mathbf{1}_{n_1} \otimes \frac{1}{\sqrt{n_2}}\mathbf{1}_{n_2}\ \dots\ \mathbf{A}_{1m1} \otimes \frac{1}{\sqrt{n_2}}\mathbf{1}_{n_2}\ \ \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{A}_{22}\ \dots\ \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{A}_{2m_2}\right].$$

Demonstração. Basta notar que a base principal da *AJC* $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ é constituída pelas matrizes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n_1}\mathbf{J}_{n_1} \otimes \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2} &= \left(\frac{1}{\sqrt{n_1}}\mathbf{1}_{n_1} \otimes \frac{1}{\sqrt{n_2}}\mathbf{1}_{n_2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}}\mathbf{1}_{n_1} \otimes \frac{1}{\sqrt{n_2}}\mathbf{1}_{n_2}\right)' \\
\mathbf{Q}_{1i} \otimes \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2} &= \left(\mathbf{A}_{1i} \otimes \frac{1}{\sqrt{n_2}}\mathbf{1}_{n_2}\right)\left(\mathbf{A}_{1i} \otimes \frac{1}{\sqrt{n_2}}\mathbf{1}_{n_2}\right)',\ i = 2, ..., m_1 \\
\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{Q}_{2j} &= (\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{A}_{2j})(\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{A}_{2j})',\ j = 2, ..., m_2
\end{aligned}$$

para verificar a tese. □

Dadas as $AJC's$ $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ verifica-se que

$$\mathcal{A}_1 \star (\mathcal{A}_2 \star \mathcal{A}_3) = (\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2) \star \mathcal{A}_3$$

ver [14].

2.4 Sub-álgebra de Jordan comutativa

Seja $\mathcal{A}$ uma AJC e $bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$. Seja $\mathcal{A}^\circ$ uma sub-álgebra de Jordan comutativa $(sub-AJC)$ de $\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{A}^\circ$ é uma AJC, tal que, $\mathcal{A}^\circ \subseteq \mathcal{A}$, ver definições 1, 2 e 4. Considere-se a base principal de $\mathcal{A}^\circ$, $bp(\mathcal{A}^\circ) = \{\mathbf{Q}_1^\circ, ..., \mathbf{Q}_{m^\circ}^\circ\}$. Como cada matriz de $bp(\mathcal{A}^\circ)$ pertence a $\mathcal{A}$ e é uma MPO,

$$\mathbf{Q}_i^\circ = \sum_{i' \in C_i} \mathbf{Q}_{i'},\ i = 1, ..., m^\circ \tag{2.4}$$

onde $C_i \subseteq \{1, ..., m\}$ e $C_{i_1} \cap C_{i_2} = \emptyset$, para $i_1 \neq i_2$ e $i_1, i_2 = 1, ..., m^\circ$. Evidentemente que se verifica $\bigcup_{i=1}^{m^\circ} C_i \subseteq \{1, ..., m\}$. Atendendo a (2.4) e como $\mathbf{Q}_{i'} = \mathbf{A}_{i'}\mathbf{A}_{i'}',\ i' = 1, ..., m$ as matrizes de $bp(\mathcal{A}^\circ)$ ainda podem ser expressas como

$$\mathbf{Q}_i^\circ = \sum_{i' \in C_i} \mathbf{A}_{i'}\mathbf{A}_{i'}' = \mathbf{A}_i^\circ (\mathbf{A}_i^\circ)',\ i = 1, ..., m^\circ \tag{2.5}$$

onde

$$\mathbf{A}_i^\circ = [\mathbf{A}_{i'}, i' \in C_i],\ i = 1, ..., m^\circ. \tag{2.6}$$

Portanto, de uma AJC $\mathcal{A}$ é possível obter uma nova AJC $\mathcal{A}^\circ$, de menor dimensão, considerando uma partição $C_1, ..., C_{m^\circ}$ de $\{1, ..., m\}$ ou de um seu subconjunto.

Se $\mathbf{P} = [\mathbf{A}_1\ ...\ \mathbf{A}_m]$ é uma matriz ortogonal associada à AJC $\mathcal{A}$ então é possível ordenar as colunas da matriz $\mathbf{P}$ e obter uma matriz ortogonal $\mathbf{P}^\circ = [\mathbf{A}_1^\circ\ ...\ \mathbf{A}_{m^\circ}^\circ]$ associada à sub-AJC $\mathcal{A}^\circ$, com $\mathbf{A}_i^\circ = [\mathbf{A}_{i'},\ i' \in C_i],\ i = 1, ..., m^\circ$.

Definição 16. *Diz-se que a AJC $\mathcal{A}^\circ$ é obtida por agregação.*

Sejam $\mathbf{U}^\circ = \sum_{i=1}^{m^\circ} \mathbf{Q}_i^\circ$ e $\mathbf{U} = \sum_{i'=1}^{m} \mathbf{Q}_{i'}$ os elementos identidade de $\mathcal{A}^\circ$ e $\mathcal{A}$, respectivamente.

Definição 17. *Diz-se que $\mathcal{A}^\circ$ é sub-AJC principal de $\mathcal{A}$ quando $\mathbf{U}^\circ = \mathbf{U}$.*

Ter que $\mathcal{A}^\circ$ é sub-AJC principal de $\mathcal{A}$ é equivalente a $\bigcup_{i=1}^{m^\circ} C_i = \{1, ..., m\}$. Caso contrário, $\bigcup_{i=1}^{m^\circ} C_i \subset \{1, ..., m\}$. Se $\mathcal{A}$ for completa, $\mathcal{A}^\circ$ é sub-AJC principal de $\mathcal{A}$ se e só se $\mathcal{A}^\circ$ também for completa.

Sejam $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ AJC's e

$$bp\left(\mathcal{A}_1\right) = \{\mathbf{Q}_{11}, ..., \mathbf{Q}_{1m_1}\},\ bp\left(\mathcal{A}_2\right) = \{\mathbf{Q}_{21}, ..., \mathbf{Q}_{2m_2}\}.$$

Sejam $\mathcal{A}_1^\circ,\ \mathcal{A}_2^\circ$ sub-AJC's de $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$, respectivamente e

$$bp\left(\mathcal{A}_1^\circ\right) = \left\{\mathbf{Q}_{11}^\circ, ..., \mathbf{Q}_{1m_1^\circ}^\circ\right\},\ bp\left(\mathcal{A}_2^\circ\right) = \left\{\mathbf{Q}_{21}^\circ, ..., \mathbf{Q}_{2m_2^\circ}^\circ\right\},$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{1i}^\circ = \sum\limits_{i' \in C_{1i}} \mathbf{Q}_{1i'}, & i = 1, ..., m_1^\circ \\ C_{1i_1} \cap C_{1i_2} = \emptyset, & i_1 \neq i_2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \mathbf{Q}_{2j}^\circ = \sum\limits_{j' \in C_{2j}} \mathbf{Q}_{2j'}, & j = 1, ..., m_2^\circ \\ C_{2j_1} \cap C_{2j_2} = \emptyset, & j_1 \neq j_2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Atendendo ao Teorema 10, $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_1^\circ \otimes \mathcal{A}_2^\circ$ são AJC's com

$$\begin{aligned} bp\left(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2\right) &= \{\mathbf{Q}_{1i'} \otimes \mathbf{Q}_{2j'},\ i' = 1, ..., m_1, j' = 1, ..., m_2\} \\ bp\left(\mathcal{A}_1^\circ \otimes \mathcal{A}_2^\circ\right) &= \left\{\mathbf{Q}_{1i}^\circ \otimes \mathbf{Q}_{2j}^\circ,\ i = 1, ..., m_1^\circ, j = 1, ..., m_2^\circ\right\}. \end{aligned}$$

Verifica-se que

Teorema 14. *$\mathcal{A}_1^\circ \otimes \mathcal{A}_2^\circ$ é sub-AJC de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.*

Demonstração. Dado que $\mathcal{A}_1^\circ \otimes \mathcal{A}_2^\circ$ é uma AJC basta verificar que $\mathcal{A}_1^\circ \otimes \mathcal{A}_2^\circ \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Seja $\mathbf{M} \in \mathcal{A}_1^\circ \otimes \mathcal{A}_2^\circ$, arbitrária. Atendendo a (2.7) e às propriedades do produto de *Kronecker*, verifica-se que

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \sum_{i=1}^{m_1^\circ}\sum_{j=1}^{m_2^\circ}\alpha_{ij}^\circ\left(\mathbf{Q}_{1i}^\circ \otimes \mathbf{Q}_{2j}^\circ\right) = \sum_{i=1}^{m_1^\circ}\sum_{j=1}^{m_2^\circ}\alpha_{ij}^\circ\left(\sum_{i'\in C_{1i}}\mathbf{Q}_{1i'} \otimes \sum_{j'\in C_{2j}}\mathbf{Q}_{2j'}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m_1^\circ}\sum_{i'\in C_{1i}}\sum_{j=1}^{m_2^\circ}\sum_{j'\in C_{2j}}\alpha_{ij}^\circ\left(\mathbf{Q}_{1i'} \otimes \mathbf{Q}_{2j'}\right) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.\end{aligned}$$

□

Corolário 3. *Se $\mathcal{A}_1^\circ$, $\mathcal{A}_2^\circ$ são sub-$AJC's$ principais de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente, então $\mathcal{A}_1^\circ \otimes \mathcal{A}_2^\circ$ é sub-AJC principal da AJC $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.*

Demonstração. Atendendo às propriedades do produto de *Kronecker* e admitindo que $\mathcal{A}_1^\circ$, $\mathcal{A}_2^\circ$ são sub-$AJC's$ principais de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente, verifica-se que

$$\sum_{i=1}^{m_1^\circ}\sum_{j=1}^{m_2^\circ}\left(\mathbf{Q}_{1i}^\circ \otimes \mathbf{Q}_{2j}^\circ\right) = \sum_{i=1}^{m_1^\circ}\mathbf{Q}_{1i}^\circ \otimes \sum_{j=1}^{m_2^\circ}\mathbf{Q}_{2j}^\circ = \sum_{i'=1}^{m_1}\mathbf{Q}_{1i'} \otimes \sum_{j'=1}^{m_2}\mathbf{Q}_{2j'} = \sum_{i'=1}^{m_1}\sum_{j'=1}^{m_2}\left(\mathbf{Q}_{1i'} \otimes \mathbf{Q}_{2j'}\right).$$

□

Se $\mathcal{A}_1^\circ$, $\mathcal{A}_2^\circ$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ forem completas e regulares, atendendo ao Corolário 2, as $AJC's$ $\mathcal{A}_1^\circ \star \mathcal{A}_2^\circ$ e $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ também são completas e regulares com

$$\begin{aligned} bp\left(\mathcal{A}_1^\circ \star \mathcal{A}_2^\circ\right) &= \left\{\mathbf{Q}_{1i}^\circ \otimes \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2},\ i = 1, ..., m_1^\circ\right\} \cup \left\{\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{Q}_{2j}^\circ, j = 2, ...m_2^\circ\right\}\\ bp\left(\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2\right) &= \left\{\mathbf{Q}_{1i'} \otimes \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2},\ i' = 1, ..., m_1\right\} \cup \left\{\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{Q}_{2j'}, j' = 2, ...m_2\right\}.\end{aligned}$$

Como as $AJC's$ consideradas são completas $\mathcal{A}_1^\circ$ e $\mathcal{A}_2^\circ$ são sub-$AJC's$ principais de $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente. Prova-se que

Teorema 15. *$\mathcal{A}_1^\circ \star \mathcal{A}_2^\circ$ é sub-AJC principal de $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$.*

Demonstração. Como $\mathcal{A}_1^\circ \star \mathcal{A}_2^\circ$ é uma AJC completa basta verificar que $\mathcal{A}_1^\circ \star \mathcal{A}_2^\circ \subseteq \mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$. Seja $\mathbf{M} \in \mathcal{A}_1^\circ \star \mathcal{A}_2^\circ$, arbitrária. Tendo em conta as propriedades do produto de Kronecker

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{m_1^\circ} \alpha_i^\circ \left(\mathbf{Q}_{1i}^\circ \otimes \frac{1}{n_2} \mathbf{J}_{n_2} \right) + \sum_{j=2}^{m_2^\circ} \beta_j^\circ \left(\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{Q}_{2j}^\circ \right) = \sum_{i=1}^{m_1^\circ} \alpha_i^\circ \mathbf{Q}_{1i}^\circ \otimes \frac{1}{n_2} \mathbf{J}_{n_2} + \mathbf{I}_{n_1} \otimes \sum_{j=2}^{m_2^\circ} \beta_j^\circ \mathbf{Q}_{2j}^\circ$$

e como

$$\sum_{i=1}^{m_1^\circ} \alpha_i^\circ \mathbf{Q}_{1i}^\circ = \sum_{i=1}^{m_1^\circ} \alpha_i^\circ \left(\sum_{i' \in C_{1i}} \mathbf{Q}_{1i'} \right) = \sum_{i=1}^{m_1^\circ} \sum_{i' \in C_{1i}} \alpha_i^\circ \mathbf{Q}_{1i'}$$

e

$$\sum_{j=1}^{m_2^\circ} \beta_j^\circ \mathbf{Q}_{2j}^\circ = \sum_{j=1}^{m_2^\circ} \beta_j^\circ \left(\sum_{j' \in C_{2j}} \mathbf{Q}_{2j'} \right) = \sum_{j=1}^{m_2^\circ} \sum_{j' \in C_{2j}} \beta_j^\circ \mathbf{Q}_{2j'}$$

verifica-se que $\mathbf{M} \in \mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$. $\square$

3. MODELO LINEAR, DE EFEITOS FIXOS, ESTRITAMENTE ASSOCIADO A UMA ÁLGEBRA DE JORDAN COMUTATIVA

As estruturas apresentadas no capítulo anterior permitem relacionar um modelo linear ortogonal com uma AJC e apresentá-lo na forma canónica, a qual, assenta na base principal da AJC. Com esta abordagem e assumindo a hipótese de normalidade é possivel derivar estatísticas suficientes e completas e obter $UMVUE's$ para os parâmetros do modelo. Nesta exposição considera-se o modelo linear de efeitos fixos. Agrupando termos de um modelo linear associado a uma AJC é possível obter, por agregação, um sub-modelo associado a uma sub-AJC principal. Utilizando as operações binárias definidas na secção 2.3 é possível construir modelos lineares ortogonais complexos, a partir de modelos lineares ortogonais mais simples, por cruzamento e por encaixe.

3.1 Estrutura do modelo e estatísticas

Seja um modelo linear

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.1}$$

e a família $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_1, ..., \mathbf{M}_{m+1}\}$ constituída pelas matrizes $\mathbf{M}_j = \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j'$, com $j = 1, ..., m$ e $\mathbf{M}_{m+1} = \mathbf{I}_n$, $\boldsymbol{\beta}_j$ vectores de parâmetros e/ou aleatórios e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o vector dos erros aleatórios.

Definição 18. *Um modelo linear diz-se ortogonal se as matrizes da família* $\mathcal{M}$ *comutarem.*

Definição 19. *Diz-se que um modelo linear está associado a uma AJC* $\mathcal{A}$ *quando a família* $\mathcal{M}$ *constituir uma base para* $\mathcal{A}$.

Decorre desta definição que um modelo linear associado a uma AJC $\mathcal{A}$ é ortogonal.

Seja um modelo linear dado por (3.1) associado a uma AJC $\mathcal{A}$. Para este modelo tem-se a família $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_1, ..., \mathbf{M}_m, \mathbf{I}_n\}$ e a base principal $bp\,(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_{m+1}\}$, com $\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_j'$, $j = 1, ..., m+1$, onde $\mathbf{A}_j$, $j = 1, ..., m+1$ são matrizes cujos vectores coluna constituem bases ortonormadas para os subespaços lineares $R\,(\mathbf{Q}_j)$, $j = 1, ..., m+1$, respectivamente (ver anexo A.1). Sendo a AJC $\mathcal{A}$ completa, a noção de ortogonalidade do modelo justifica-se dada a relação de $\mathcal{A}$ com partição ortogonal de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n = \underset{j=1}{\overset{m+1}{\boxplus}} R\,(\mathbf{Q}_j)\,.$$

Exemplo 5. *Uma amostra aleatória de dimensão* r

$$\mathbf{y} = \mathbf{1}_r\mu + \mathbf{I}_r\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.2}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ *tem vector médio* $\mathbf{0}$ *e matriz de variâncias-covariâncias* $\sigma^2\mathbf{I}_r$, *é um modelo linear associado à AJC* $\mathcal{A}(r)$ *cuja base principal é* $bp\,(\mathcal{A}) = \left\{\frac{1}{r}\mathbf{J}_r, \mathbf{I}_r - \frac{1}{r}\mathbf{J}_r\right\}$ *e* $\mathcal{M} = \{\mathbf{J}_r, \mathbf{I}_r\}$ *(ver exemplo 4 apresentado na secção 2.2).*

Definição 20. *Um modelo linear*

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{A}_j\boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.3}$$

onde $\mathcal{M} = bp(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_{m+1}\}$, *com* $\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_j'$, $j = 1, ..., m$ *e* $\mathbf{Q}_{m+1} = \mathbf{I}_n - \sum_{j=1}^{m}\mathbf{Q}_j$ *diz-se um modelo linear estritamente associado à AJC* $\mathcal{A}$.

Dado que um modelo linear estritamente associado a uma AJC é um modelo linear associado a uma AJC, conceitos sobre o encaixe e cruzamento de modelos associados aplicam-se também aos modelos lineares estritamente associados a uma AJC. Como se pode ver em [14], dados dois modelos lineares associados às $AJC's$ $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, o modelo obtido por encaixe está associado à AJC $\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2$ e o modelo obtido por cruzamento está associado à AJC $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Vê-se também em [14] que um modelo com réplicas é um caso particular do encaixe de modelos. Se $\mathcal{A}$ for a AJC associada a um modelo com apenas uma repetição o mesmo modelo com r repetições está associado à AJC $\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)$, onde $\mathcal{A}(r)$ é a AJC completa e regular com base principal

$$bp\,(\mathcal{A}(r)) = \left\{ \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, \mathbf{I}_r - \frac{1}{r}\mathbf{J}_r \right\}$$

(ver exemplo 4).

Na exposição que se segue apresenta-se a estrutura de um modelo linear, com r réplicas, estritamente associado a uma AJC $\mathcal{A}\star\mathcal{A}(r)$, completa e regular, de efeitos fixos, que será utilizada na descrição do modelo descrito no próximo capítulo. Assim, seja $\mathcal{A}$ uma AJC, completa, constituída por matrizes, de ordem n, com

$$bp\,(\mathcal{A}) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$$

onde $\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}'_j, j = 1, ..., m$. A base principal da AJC, também completa, $\mathcal{A}\star\mathcal{A}(r)$, constituída por matrizes de ordem nr, é dada por

$$bp\,(\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)) = \left\{ \mathbf{Q}_1 \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, ..., \mathbf{Q}_m \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, \mathbf{Q}_{m+1} \right\} \tag{3.4}$$

ver secção 2.3, com

$$\mathbf{Q}_{m+1} = \mathbf{I}_n \otimes \left(\mathbf{I}_r - \frac{1}{r}\mathbf{J}_r \right) = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{K}_r\mathbf{K}'_r,$$

onde $\mathbf{K}_r$ é uma matriz, do tipo $r \times (r-1)$, que se obtém de uma matriz ortogonal estandardizada, de ordem r, eliminando a 1ª coluna igual a $\frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r$ (ver Anexo A.4).

As matrizes de $bp(\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r))$ ainda se podem escrever como

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_j \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r = \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)', & j=1,\ldots,m \\ \mathbf{Q}_{m+1} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{K}_r\mathbf{K}_r' = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{K}_r)(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{K}_r)' = \mathbf{A}_{m+1}\mathbf{A}_{m+1}' \end{cases} \tag{3.5}$$

com $\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{K}_r$. Sendo $g_j = car(\mathbf{A}_j), j = 1, ..., m$ e $g = car(\mathbf{A}_{m+1})$ as características das matrizes de $bp(\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r))$ são

$$\begin{cases} g_j = car\left(\mathbf{Q}_j \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r\right) = car(\mathbf{Q}_j) = car(\mathbf{A}_j), \quad j=1,\ldots,m \\ g = car(\mathbf{A}_{m+1}) = n(r-1) \end{cases}$$

(ver Anexo A.2). Devido à ortonormalidade das colunas das matrizes $\mathbf{A}_j$ (ver Anexo A.1) verifica-se para $j, i = 1, ..., m$

$$\begin{cases} \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\left(\mathbf{A}_i \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right) = \mathbf{0}_{g_j \times g_i}, \quad j \neq i \\ \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right) = \mathbf{I}_{g_j} \end{cases} \tag{3.6}$$

e

$$\begin{cases} \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{0}_{g_j \times n(r-1)} \\ \mathbf{A}_{m+1}'\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{I}_{n(r-1)}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Assim um modelo linear, com r réplicas, estritamente associado à AJC completa $\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)$, de efeitos fixos, é dado por

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{m} \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.8}$$

onde $\boldsymbol{\beta}_1, ..., \boldsymbol{\beta}_m$ são vectores de parâmetros e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o vector dos erros aleatórios. Como $\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)$ é uma AJC completa

$$\mathbf{I}_{nr} = \sum_{j=1}^{m}\left(\mathbf{Q}_j \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r\right) + \mathbf{Q}_{m+1} = \sum_{j=1}^{m}\left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' + \mathbf{A}_{m+1}\mathbf{A}_{m+1}'$$

e assim

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I}_{nr}\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{m}\left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\mathbf{Y} + \mathbf{A}_{m+1}\mathbf{A}_{m+1}'\mathbf{Y} \tag{3.9}$$

obtendo-se

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{m} \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r \right) \mathbf{W}_j + \mathbf{A}_{m+1} \mathbf{W}_{m+1} \tag{3.10}$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{W}_j = \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r \right)' \mathbf{Y}, \quad j = 1, ..., m \\ \mathbf{W}_{m+1} = \mathbf{A}'_{m+1} \mathbf{Y}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Definição 21. *Um modelo linear estritamente associado à AJC $\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)$ com a estrutura (3.10) diz-se que está na forma canónica.*

Como já foi referido no início deste capítulo assumindo a hipótese de normalidade e utilizando o modelo na forma (3.10) é possível derivar estatísticas suficientes, completas e obter *UMVUE's* para os parâmetros do modelo. Até ao final desta secção e na próxima são necessários resultados estatísticos que estão resumidos no Anexo B (Vectores aleatórios, distribuição Normal multivariada) e Anexo C (Estatísticas suficientes e completas).

Admitindo que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{nr}\right)$ verifica-se que

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_{nr}\right), \tag{3.12}$$

onde

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\left[\mathbf{Y}\right] = \sum_{j=1}^{m} \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r \right) \boldsymbol{\beta}_j. \tag{3.13}$$

Seja o espaço linear $\Omega = \boxplus_{j=1}^{m} R\left(\mathbf{Q}_j \otimes \frac{1}{r} \mathbf{J}_r\right)$. A matriz de projecção ortogonal sobre Ω é $\mathbf{Q}_\Omega = \sum_{j=1}^{m} \left(\mathbf{Q}_j \otimes \frac{1}{r} \mathbf{J}_r \right)$ (ver Anexo A.1). Como $\boldsymbol{\mu} \in \Omega$,

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{Q}_\Omega\ \boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^{m} \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r \right) \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r \right)' \boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^{m} \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r \right) \boldsymbol{\lambda}_j \tag{3.14}$$

com

$$\boldsymbol{\lambda}_j = \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r \right)' \boldsymbol{\mu}, j = 1, ..., m. \tag{3.15}$$

Como $\Omega^{\perp} = R\left(\mathbf{Q}_{m+1}\right)$ verifica-se que

$$\mathbf{A}'_{m+1}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_{n(r-1)\times 1}. \tag{3.16}$$

Seja o vector $\mathbf{W} = \left[\mathbf{W}'_1 \; ... \; \mathbf{W}'_m \mathbf{W}'_{m+1}\right]'$ onde $\mathbf{W}_j, j = 1, ..., m+1$ são dados por (3.11). Atendendo ao Teorema 13 e a (3.5)

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\left(\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)\right) = \left[\mathbf{A}_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r \; ... \; \mathbf{A}_m \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r \;\; \mathbf{A}_{m+1}\right]$$

é uma diagonalizadora ortogonal da AJC $\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{PW}$. Assim, $\mathbf{W} = \mathbf{P}'\mathbf{Y}$ e

$$\mathbf{W} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}, \sigma^2 \mathbf{I}_{nr}\right)$$

onde

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P}'\boldsymbol{\mu} = \left[\boldsymbol{\lambda}'_1 \; ... \; \boldsymbol{\lambda}'_m \; ... \; \mathbf{0}'_{n(r-1)}\right]'$$

e $\boldsymbol{\lambda}_j, j = 1, ..., m$ são dados por (3.15). Os vectores $\mathbf{W}_j, j = 1, ..., m+1$, são independentes e

$$\begin{cases} \mathbf{W}_j \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}_j, \sigma^2 \mathbf{I}_{g_j}\right) \;\; j = 1, ..., m \\ \mathbf{W}_{m+1} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{n(r-1)}\right) \end{cases} \tag{3.17}$$

onde $car\left(\mathbf{A}_j\right) = g_j, \; j = 1, ..., m$. Considerando as variáveis aleatórias

$$\begin{cases} S_j = \left\|\mathbf{W}_j\right\|^2, j = 1, ..., m \\ S = \left\|\mathbf{W}_{m+1}\right\|^2 \end{cases} \tag{3.18}$$

verifica-se que

$$\begin{cases} S_j \sim \sigma^2 \chi^2_{g_j, \delta_j} \;\; j = 1, ..., m \\ \delta_j = \frac{1}{\sigma^2}\left\|\boldsymbol{\lambda}_j\right\|^2 \;\; j = 1, ..., m \\ S \sim \sigma^2 \chi^2_{n(r-1)} \end{cases}$$

e que são independentes. A função densidade de $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_{nr}\right)$ é dada por

$$f_{\mathbf{Y}}\left(\mathbf{y}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'\left(\sigma^2\mathbf{I}_{nr}\right)^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}}{\sqrt{(2\pi)^{nr}|\sigma^2\mathbf{I}_{nr}|}} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{I}_{nr}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}}{\sqrt{(2\pi)^{nr}(\sigma^2)^{nr}}}.$$

Atendendo a que $\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)$ é uma AJC completa, a (3.9), (3.11), (3.15)-(3.18)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})' \mathbf{I}_{nr} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}) &= \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})' \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}) \\
&+ (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})' \mathbf{A}_{m+1}\mathbf{A}'_{m+1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left\| \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}) \right\|^2 + \left\|\mathbf{A}'_{m+1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left\| \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \mathbf{y} - \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu} \right\|^2 \\
&+ \left\|\mathbf{A}'_{m+1}\mathbf{y} - \mathbf{A}'_{m+1}\boldsymbol{\mu}\right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{w}_j - \boldsymbol{\lambda}_j\|^2 + s
\end{aligned}$$

Assim,

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{e^{-\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{w}_j - \boldsymbol{\lambda}_j\|^2 - \frac{s}{2\sigma^2}}}{\sqrt{(2\pi)^{nr}\left(2\sigma^2\right)^{nr}}}. \tag{3.19}$$

É possível agora estabelecer o Teorema seguinte.

Teorema 16. *As estatísticas* $\mathbf{W}_j,\ j = 1, ..., m$ *e* S *são conjuntamente suficientes e completas.*

Demonstração. Dado (3.19) e utilizando o Teorema da factorização (Anexo C) as estatísticas $\mathbf{W}_j,\ j = 1, ..., m$ e S são conjuntamente suficientes. Como a distribuição de $\mathbf{Y}$ pertence à família exponencial e o espaço paramétrico contém um rectângulo com a mesma dimensão as estatísticas são suficientes e completas, Teorema 68 (Anexo C). □

3.2 Inferência relativa aos parâmetros do modelo

Sejam os vectores

$$\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j, j = 1, ..., m$$

onde $\mathbf{B}_j$ são matrizes, do tipo $s_j \times g_j$, com $car(\mathbf{B}_j) = s_j \leq g_j, j = 1, ..., m$ e $\boldsymbol{\lambda}_j, j = 1, ..., m$ dados por (3.15). Como $\mathbf{W}_j,\ j = 1, ..., m$ e S, dadas por (3.17) e (3.18), respectivamente, são estatísticas conjuntamente suficientes, completas e

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j] = \mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j,\ j = 1, ..., m \\ \mathbb{E}\left[\frac{S}{n(r-1)}\right] = \sigma^2 \end{cases}$$

de acordo com o Teorema 69 (Anexo C),

$$\begin{cases} \mathbf{B}_j\mathbf{W}_j \text{ é } UMVUE \text{ para } \mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j,\ j = 1, ..., m \\ \frac{S}{n(r-1)} \text{ é } UMVUE \text{ para } \sigma^2. \end{cases}$$

Como $\mathbf{W}_j \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}_j, \sigma^2\mathbf{I}_{g_j}\right)\ j = 1, ..., m$, então

$$\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j, \sigma^2\mathbf{B}_j\mathbf{B}_j'\right), j = 1, ..., m \tag{3.20}$$

e consequentemente

$$U_j = (\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{c}_j)'\left(\mathbf{B}_j\mathbf{B}_j'\right)^{-1}(\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{c}_j) \sim \sigma^2\chi^2_{s_j,\delta_j},\ j = 1, ..., m$$

onde os parâmetros de não centralidade são dados por

$$\delta_j = \frac{(\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{c}_j)'\left(\mathbf{B}_j\mathbf{B}_j'\right)^{-1}(\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j - \mathbf{B}_j\mathbf{c}_j)}{\sigma^2},\ j = 1, ..., m \tag{3.21}$$

e $\mathbf{B}_j\mathbf{c}_j \in R(\mathbf{B}_j),\ j = 1, ..., m$. Como $\mathbf{W}_j$ e S são independentes o mesmo acontece com U_j e S verificando-se que

$$\mathcal{F}_j = \frac{n(r-1)}{s_j}\frac{U_j}{S}, j = 1, ..., m$$

têm distribuição F não central com parâmtetros s_j e $n(r-1)$ e parâmetro de não centralidade δ_j dado por (3.21), simbolicamente

$$F_j \sim \mathcal{F}_{s_j,n(r-1),\delta_j}$$

(ver Anexo B.3). Em particular, caso $\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{B}_j\mathbf{c}_j,\ j = 1, ..., m$ obtém-se

$$U_{0,j} = (\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j - \mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j)' \left(\mathbf{B}_j\mathbf{B}_j'\right)^{-1} (\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j - \mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j) \sim \sigma^2\chi^2_{s_j}$$

e

$$F_{0,j} = \frac{n(r-1)}{s_j}\frac{U_{0,j}}{S} \sim \mathcal{F}_{s_j,n(r-1)}. \tag{3.22}$$

Utilizando os resultados anteriores é possível obter elipsóides de confiança para $\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{j}},\ j = 1, ..., m$. Seja $f_{(s_j,g,1-\alpha)}$ o quantil da distribuição $\mathcal{F}$ com s_j e $n(r-1)$ graus de liberdade para a probabilidade $1-\alpha$, então

$$\mathbb{P}\big[F_{0,j} \leq f_{(s_j,n(r-1),1-\alpha)}\big] = \mathbb{P}\left[U_{0,j} \leq s_j f_{(s_j,n(r-1),1-\alpha)}\frac{S}{n(r-1)}\right] = 1-\alpha$$

determinando a desigualdade, ver Scheffé (1959)

$$U_{0,j} \leq s_j f_{(s_j,n(r-1),1-\alpha)}\frac{S}{n(r-1)} \tag{3.23}$$

um elipsóide de confiança para $\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j,\ j = 1, ..., m$. O teste de hipóteses

$$H_{0,j} : \mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{B}_j\mathbf{c}_j,\ j = 1, ..., m \tag{3.24}$$

utiliza (3.22) rejeitando-se $H_{0,j}$ se e só se o elipsóide de confiança não cobrir $\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{B}_j\mathbf{c}_j$, ou seja, rejeita-se $H_{0,j}$ se e só se

$$U_{0,j} > s_j f_{(s_j,n(r-1),1-\alpha)}\frac{S}{n(r-1)}.$$

Por outro lado um ponto está no interior de um elipsóde se e só se estiver entre todos os pares de planos tangentes ao elipsóide. Para $\mathbf{d} \neq 0$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\mathbf{d}_j}\left|\mathbf{d}_j'\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j - \mathbf{d}_j'\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j\right| \leq \sqrt{s_j f_{(s_j,n(r-1),1-\alpha)}\mathbf{d}_j'\mathbf{B}_j\mathbf{B}_j'\mathbf{d}_j\frac{S}{n(r-1)}}\right) = 1-\alpha$$

onde a intersecção é feita para todos os vectores $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^n$, ver [44]. Das desigualdades obtêm-se intervalos de confiança simultâneos para $\mathbf{d}_j'\mathbf{B}_j\boldsymbol{\lambda}_j$ dados por

$$\left[\mathbf{d}_j'\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j - Z_j;\ \mathbf{d}_j'\mathbf{B}_j\mathbf{W}_j + Z_j\right]$$

onde $Z_j = \sqrt{s_j f_{(s_j,n(r-1),1-\alpha)}\mathbf{d}_j'\mathbf{B}_j\mathbf{B}_j'\mathbf{d}_j \frac{S}{n(r-1)}}$. Pode-se considerar também as sub-hipóteses

$$H_{0,j,i} : \left(\mathbf{b}_i^j\right)'\boldsymbol{\lambda}_j = \left(\mathbf{b}_i^j\right)'\mathbf{c}_j,\ i = ..., g_j \tag{3.25}$$

onde $\mathbf{b}_1^j, ..., \mathbf{b}_{g_j}^j$ são os vectores linha de $\mathbf{B}_j$. A hipótese $H_{0,j}$ verifica-se se e só se se verificarem as sub-hipóteses $H_{0,j,i},\ i = 1, ..., g_j$. Utilizando (3.23) é possível obter um intervalo de confiança para $\left(\mathbf{b}_i^j\right)'\boldsymbol{\lambda}_j$. Atendendo à relação entre as distribuições t e $\mathcal{F}$ vem

$$T_{j,i} = \frac{\left(\mathbf{b}_i^j\right)'\mathbf{W}_j - \left(\mathbf{b}_i^j\right)'\boldsymbol{\lambda}_j}{\sqrt{\frac{S}{n(r-1)}\left(\mathbf{b}_i^j\right)'\left(\mathbf{b}_i^j\right)}} \sim t_{n(r-1)},\ i = 1, ..., g_j$$

pelo que o intervalo de confiança bilateral é dado por

$$\left[\left(\mathbf{b}_i^j\right)'\mathbf{W}_j - t_{(n(r-1),1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{S}{n(r-1)}\left(\mathbf{b}_i^j\right)'\left(\mathbf{b}_i^j\right)}\ ;\ \left(\mathbf{b}_i^j\right)'\mathbf{W}_j + t_{(n(r-1),1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{S}{n(r-1)}\left(\mathbf{b}_i^j\right)'\left(\mathbf{b}_i^j\right)}\right]$$

onde $t_{(n(r-1),1-\frac{\alpha}{2})}$ representa o quantil da distribuição t com $n(r-1)$ graus de liberdade para a probabilidade $1-\frac{\alpha}{2}$. Assim, rejeita-se a hipótese $H_{0,j,i}$ se e só se $|T_{j,i}| > t_{(n(r-1),1-\frac{\alpha}{2})}$. Com as devidas alterações obtêm-se intervalos de confiança unilaterais e os respectivos testes de hipóteses.

Sabe-se que $\frac{S}{n(r-1)}$ é um *UMVUE* para σ^2 e que $S \sim \sigma^2\chi^2_{n(r-1)}$. Considere-se $\chi^2_{(n(r-1),1-\frac{\alpha}{2})}$ e $\chi^2_{(n(r-1),\frac{\alpha}{2})}$ os quantis da distribuição qui-quadrado com $n(r-1)$ graus de liberdade para a probabilidade $1-\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\alpha}{2}$, respectivamente. Então um intervalo de confiança bilateral para σ^2 para a probabilidade $1-\alpha$ é

$$\left[\frac{S}{\chi^2_{(n(r-1),1-\frac{\alpha}{2})}}\ ;\ \frac{S}{\chi^2_{(n(r-1),\frac{\alpha}{2})}}\right]. \tag{3.26}$$

Os intervalos de confiança unilaterais à direita e à esquerda para σ^2 correspondentes à probabilidade $1-\alpha$ são, respectivamente,

$$\left]0\ ;\ \frac{S}{\chi^2_{(n(r-1),\alpha)}}\right] \qquad e \qquad \left[\frac{S}{\chi^2_{(n(r-1),1-\alpha)}}\ ;\ +\infty\right[. \tag{3.27}$$

Ao intervalo de confiança bilateral (3.26) corresponde o teste de hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

sendo a hipótese H_0 rejeitada se e só se $\chi^2_{obs} > \chi^2_{(n(r-1),1-\frac{\alpha}{2})}$ ou $\chi^2_{obs} < \chi^2_{(n(r-1),\frac{\alpha}{2})}$ onde χ^2_{obs} representa o valor calculado da estatística de teste. Com as devidas alterações obtêm-se os testes unilaterais à direita e à esquerda correspondentes aos intervalos de confiança (3.27), respectivamente.

3.3 Sub-modelo estritamente associado a uma álgebra de Jordan comutativa

De um modelo linear estritamente associado a uma AJC completa é possível obter outro modelo linear (que se designará por sub-modelo) estritamente associado a uma sua sub-AJC principal. Recordando a secção 3.1 seja um modelo linear, de efeitos fixos, na forma canónica

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{m} \left(\mathbf{A}_j \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r \right) \mathbf{W}_j + \mathbf{A}_{m+1} \mathbf{W}_{m+1}$$

estritamente associado à AJC completa $\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)$, cuja base principal é

$$bp\left(\mathcal{A} \star \mathcal{A}(r)\right) = \left\{ \mathbf{Q}_1 \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, ..., \mathbf{Q}_m \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, \mathbf{Q}_{m+1} \right\}$$

onde as matrizes $\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_j',\ j = 1, ..., m+1$ são dadas por (3.5) e os vectores $\mathbf{W}_j = \mathbf{A}_j'\mathbf{Y},\ j = 1, ..., m+1$ por (3.11). Relembrando também a secção 2.4 seja $\mathcal{A}^\circ$

uma sub-AJC principal de $\mathcal{A}$ (também completa) com base principal dada por

$$bp\left(\mathcal{A}^{\circ}\right)=\left\{\mathbf{Q}_1^{\circ},...,\mathbf{Q}_{m^{\circ}}^{\circ}\right\}$$

onde

$$\mathbf{Q}_i^{\circ}=\sum_{i'\in C_i}\mathbf{A}_{i'}\mathbf{A}_{i'}^{\prime}=\mathbf{A}_i^{\circ}\left(\mathbf{A}_i^{\circ}\right)^{\prime},\ i=1,...,m^{\circ},$$

$C_1,...,C_{m^{\circ}}$ constituem uma partição de $\{1,...,m\}$ e as matrizes $\mathbf{A}_i^{\circ}$ são dadas por (2.6). Atendendo ao Teorema 15 $\mathcal{A}^{\circ}\star\mathcal{A}(r)$ é sub-AJC principal de $\mathcal{A}\star\mathcal{A}(r)$ e

$$bp\left(\mathcal{A}^{\circ}\star\mathcal{A}(r)\right)=\left\{\mathbf{Q}_1^{\circ}\otimes\frac{1}{r}\mathbf{J}_r,...,\mathbf{Q}_{m^{\circ}}^{\circ}\otimes\frac{1}{r}\mathbf{J}_r,\mathbf{Q}_{m^{\circ}+1}^{\circ}\right\}.$$

Assim, um modelo linear na forma canónica estritamente associado à AJC completa $\mathcal{A}^{\circ}\star\mathcal{A}(r)$ é dado por

$$\mathbf{Y}^{\circ}=\sum_{i=1}^{m^{\circ}}\left(\mathbf{A}_i^{\circ}\otimes\frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\mathbf{W}_i^{\circ}+\mathbf{A}_{m^{\circ}+1}^{\circ}\mathbf{W}_{m^{\circ}+1}^{\circ} \tag{3.28}$$

onde

$$\mathbf{W}_i^{\circ}=\left[\mathbf{W}_j,j\in C_i\right],\ i=1,...,m^{\circ}, \tag{3.29}$$

$\mathbf{W}_{m^{\circ}+1}^{\circ}=\mathbf{W}_{m+1}$, e $\mathbf{A}_{m^{\circ}+1}^{\circ}=\mathbf{A}_{m+1}$.

Definição 22. *O modelo (3.28) designa-se por sub-modelo estritamente associado à AJC $\mathcal{A}^{\circ}\star\mathcal{A}(r)$.*

É habitual também dizer que o modelo (3.28) é obtido por agregação.

3.4 Cruzamento e encaixe de modelos

Como já foi referido é possível construir modelos lineares associados a uma AJC complexos, a partir de modelos lineares associados a uma AJC mais simples, por cruzamento e por encaixe, utilizando, respectivamente, as operações $\otimes$ e $\star$, definidas na secção 2.3, ver [14]. Quando se derivam modelos lineares ortogonais complexos considera-se que os modelos iniciais têm apenas uma réplica ($r = 1$) cada um. Depois do cruzamento e/ou encaixe pode considerar-se o modelo com réplicas, caso particular do encaixe de modelos. Por exemplo, o modelo que resulta de encaixar o 3º modelo no cruzamento dos dois primeiros modelos está associado à AJC

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \star \mathcal{A}_3.$$

Depois do cruzamento e encaixe pode considerar-se réplicas e a AJC associada ao novo modelo é

$$((\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \star \mathcal{A}_3) \star \mathcal{A}(r).$$

A ideia associada ao cruzamento de modelos é considerar todas as combinações possíveis de tratamentos dos modelos iniciais. Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2, AJC's$ completas e regulares, as respectivas bases principais,

$$bp\,(\mathcal{A}_1) = \{\mathbf{Q}_{11}, ...\mathbf{Q}_{1m_1}\} \quad e \quad bp\,(\mathcal{A}_2) = \{\mathbf{Q}_{21}, ...\mathbf{Q}_{2m_2}\} \tag{3.30}$$

onde $\mathbf{Q}_{1i} = \mathbf{A}_{1i}\mathbf{A}'_{1i}, i = 1, ..., m_1$ e $\mathbf{Q}_{2j} = \mathbf{A}_{2j}\mathbf{A}'_{2j}, j = 1, ..., m_2$.

Cruzando os modelos lineares estritamente associados às $AJC's$ $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente, obtém-se o modelo na forma canónica, com $r > 1$, dado por

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2}\left(\mathbf{A}_{1i} \otimes \mathbf{A}_{2j} \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\mathbf{W}_{ij} + \mathbf{A}_{m_1m_2+1}\mathbf{W}_{m_1m_2+1} \tag{3.31}$$

estritamente assciado à AJC $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \star \mathcal{A}(r)$ onde

$$bp\,(\mathcal{A}) = \left\{\mathbf{Q}_{i1} \otimes \mathbf{Q}_{2j} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, i = 1, ..., m_1, j = 1, ..., m_2\right\} \cup \left\{\mathbf{I}_{n_1n_2} \otimes \left(\mathbf{I}_r - \frac{1}{r}\mathbf{J}_r\right)\right\}.$$

O modelo que resulta do encaixe do segundo modelo no primeiro, com $r > 1$, estritamente associado à AJC $(\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2) \star \mathcal{A}(r)$, é dado por

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{m_1}\left(\mathbf{A}_{1i} \otimes \frac{1}{\sqrt{n_2}}\mathbf{1}_{n_2} \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\mathbf{W}_i + \sum_{j=2}^{m_2}\left(\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{A}_{2j} \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\mathbf{W}_{m_1+j-1} + \mathbf{A}^*\mathbf{W}^*$$

onde

$$\begin{aligned} bp\left(\left(\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2\right) \star \mathcal{A}(r)\right) &= \left\{\mathbf{Q}_{i1} \otimes \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, i = 1, ..., m_1\right\} \\ &\cup \left\{\mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{Q}_{2j} \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r,\ j = 2, ..., m_2\right\} \cup \left\{\mathbf{I}_{n_1 n_2} \otimes \left(\mathbf{I}_r - \frac{1}{r}\mathbf{J}_r\right)\right\} \end{aligned}$$

e $\mathbf{A}^* = \mathbf{I}_{n_1 n_2} \otimes \mathbf{K}_r$ e $\mathbf{W}^* = \left(\mathbf{A}^*\right)' \mathbf{Y}$.

4. DELINEAMENTO FACTORIAL COM BASE PRIMA

Uma experiência que envolva o estudo de N (≥ 2) factores $F_1, ..., F_N$ com $p_1, ..., p_N$ (≥ 2) níveis respectivamente, designa-se delineamento factorial $p_1 \times ... \times p_N$, ou apenas, factorial $p_1 \times ... \times p_N$. Os factoriais estão associados a experiências em que se pretende estudar o efeito de vários factores (individualmente ou em conjunto) numa variável resposta (ou dependente) Y. Em cada réplica completa de um factorial são observadas todas as combinações possíveis de níveis dos factores (tratamentos) dizendo-se que os N factores estão cruzados. Também é habitual utilizar a designação de factorial completo (do inglês "*full factorial*"). Por exemplo, um factorial com dois factores, F_1 e F_2, com $p_1 = 3$ e $p_2 = 2$ níveis, respectivamente, tem 6 tratamentos. Nesta tese considera-se que o número de níveis de cada factor é igual a p

$$p_1 = ... = p_N = p$$

e p é um número primo. Nesta situação cada réplica completa da experiência tem $p \times \ldots \times p = p^N$ observações e designa-se por factorial de base prima p^N ou apenas factorial p^N. Para $p = 2$ e $p = 3$, ver por exemplo [29], [36]. Numerando os p níveis de cada factor de 0 até $p - 1$, cada tratamento pode ser representado por um vector $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N)$, cujas componentes $x_i \in \{0, ..., p-1\}, i = 1, ..., N$ representam os níveis dos factores. Se a experiência for repetida r vezes são necessárias rp^N observações. À medida que o número de factores e/ou número de níveis aumenta o número de tratamentos de um factorial cresce rapidamente. Por exemplo, num factorial 2^N o número de tratamentos aumenta de 32 para 128 se o número de factores passar de $N = 5$ para $N = 7$, ou de $32r$ para $128r$ se for possível repetir a experiência $r > 1$ vezes. Por motivos óbvios de economia, de tempo, de recursos, etc, nem sempre é possível considerar todos os tratamentos de um factorial em condições homogéneas ou até mesmo não ser possível considerar os tratamentos na totalidade. Uma possibilidade é agrupar os p^N tratamentos de um factorial em $p^s(s < N)$ grupos, designados por blocos, em que o número de tratamentos por bloco é inferior a p^N. Apesar de permitir um melhor controlo do erro experimental, esta técnica faz com que geralmente interações de ordem elevada sejam confundidas com os blocos, daí a designação Confundimento de um factorial p^N com p^s blocos (do inglês "*Confounding*"). Em vez de utilizar os p^s blocos pode-se considerar apenas um deles, ou seja, considerar uma fracção do número total de tratamentos $\frac{1}{p^s} \times p^N = p^{N-s}$, onde $s < N$. Este delineamento designa-se por réplica fraccionária ou fraccionamento (do inglês "fractional replicate"). Neste capítulo são descritas as estruturas algébricas associadas: a um factorial p^N (completo), a um factorial p^N confundido com p^s blocos e a uma réplica fraccionária $\frac{1}{p^s} \times p^N$. A teoria associada à estrutura destes modelos assenta nos espaços lineares sobre os *corpos de Galois*, (ver [15], [16], [40] e [41]) e na relação entre modelos lineares ortogonais e $AJC's$ ([14], [15], [16] e [17]). Para uma abordagem alternativa ver [38]. Nas secções seguintes mostra-se como se obtém a AJC associada a cada um dos modelos referidos.

4.1 Factorial p^N completo

Sejam p um número primo e o conjunto

$$G_{[p]} = \{0, 1, ..., p-1\}.$$

Em $G_{[p]}$ pode-se definir uma adição e uma multiplicação substituindo os resultados das operações usuais pelos restos das mesmas por p

$$a + b = mod(a + b, p) \tag{4.1}$$

$$ab = mod(ab, p). \tag{4.2}$$

Estas operações designam-se por adição e a multiplicação módulo p.

Exemplo 6. *Em* $G_{[7]} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *por exemplo,* $2 + 6 = 1$ *e* $2 \times 5 = 3$.

O conjunto $G_{[p]}$ munido das operações (4.1) e (4.2) é um corpo, com elemento neutro para a adição e multiplicação 0 e 1, respectivamente. O simétrico de $a \in G_{[p]}$ é dado pela expressão

$$-a = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ p - a, & a \neq 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

O corpo $G_{[p]}$ tem um número finito de elementos e geralmente é designado por *corpo finito* ou por *corpo de Galois* (em homenagem a *Évariste Galois que introduziu a noção de corpo com um número finito de elementos*). Relativamente ao inverso a^{-1} em $G_{[p]}$ não existe uma expressão geral para o representar. Na prática constrói-se a tabela da multiplicação em $G_{[p]}$ e determinam-se os inversos.

Exemplo 7. *Utilizando (4.1) e (4.2), as tabelas da adição e multiplicação em* $G_{[7]} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *são, respectivamente, dadas por,*

+	0	1	2	3	4	5	6
0	**0**	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	**0**
2	2	3	4	5	6	**0**	1
3	3	4	5	6	**0**	1	2
4	4	5	6	**0**	1	2	3
5	5	6	**0**	1	2	3	4
6	6	**0**	1	2	3	4	5

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	**1**	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	**1**	3	5
3	0	3	6	2	5	**1**	4
4	0	4	**1**	5	2	6	3
5	0	5	3	**1**	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	**1**

Tab. 4.1: Tabelas da adição e multiplicação em $G_{[7]}$

Tendo em conta a tabela da adição, ou (4.3), os simétricos dos elementos $a \in G_{[7]}$ *são Pela tabela da multiplicação os inversos de* $a \in G_{[7]} \backslash \{0\}$ *são*

a	0	1	2	3	4	5	6
-a	0	6	5	4	3	2	1

Tab. 4.2: Simétricos em $G_{[7]}$

a	1	2	3	4	5	6
a^{-1}	1	4	5	2	3	6

Tab. 4.3: Inversos em $G_{[7]} \backslash \{0\}$

É importante referir que se p não for um número primo não se obtém a estrutura de um corpo. De facto, veja-se o exemplo seguinte.

Exemplo 8. *Se* $p = 4$, $G_{[4]} = \{0, 1, 2, 3\}$ *e como se pode ver na tabela da multiplicação o elemento 2 não tem inverso, pelo que,* $G_{[4]}$ *não é um corpo.*

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	**0**	**2**	**0**	**2**
3	0	3	2	1

Tab. 4.4: Tabelas de adição e multiplicação em $G_{[4]}$

O conjunto $G_{[p]}^N = \left\{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N) : x_i \in G_{[p]}, i = 1, ..., N\right\}$ munido das operações definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, ..., x_N + y_N) \\ c\mathbf{x} &= (cx_1, ..., cx_N) \end{aligned}$$

com $c \in G_{[p]}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G_{[p]}^N$, é um espaço linear sobre o corpo $G_{[p]}$, onde as componentes dos vectores são obtidas utilizando as operações (4.1) e (4.2). A família dos vectores $\mathbf{e}_1 = (1, ..., 0), ..., \mathbf{e}_N = (0, ..., 1)$ é uma base de $G_{[p]}^N$ tendo-se

$$dim\left(G_{[p]}^N\right) = N$$

o que significa que $G_{[p]}^N$ é um espaço linear de dimensão finita N. Num factorial p^N, numerando os níveis de cada factor de 0 até $p - 1$, os tratamentos podem ser representados pelos vectores de $G_{[p]}^N$

$$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N)\,.$$

Dado um vector $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_N)$ cujas componentes pertencem a $G_{[p]}$, define-se em $G_{[p]}^N$ a aplicação linear

$$\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j, \ \mathbf{x} \in G_{[p]}^N \tag{4.4}$$

onde as operações são realizadas na aritmética módulo p.

Definição 23. *As componentes do vector* $\mathbf{a}$ *designam-se por coeficientes da aplicação linear* $\ell_{\mathbf{a}}$.

Seja $\mathcal{L}_{[p]}^N$ o conjunto das aplicações lineares dadas por (4.4). Neste conjunto podem definir-se uma adição e uma multiplicação por um escalar, por

$$\begin{aligned} \left(\ell_{\mathbf{a}_1} + \ell_{\mathbf{a}_2}\right)(\mathbf{x}) &= \ell_{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in G_{[p]}^N \\ \left(c\ell_{\mathbf{a}}\right)(\mathbf{x}) &= \ell_{c\mathbf{a}}(\mathbf{x}), \ c \in G_{[p]}, \mathbf{x} \in G_{[p]}^N \end{aligned}$$

respectivamente. O conjunto $\mathcal{L}_{[p]}^N$ munido destas duas operações é um espaço linear sobre o corpo $G_{[p]}$, cujo elemento neutro para a adição é a aplicação $\ell_{\mathbf{0}}$ que tem $\mathbf{0}$ como vector dos coeficientes e elemento simétrico a aplicação $\ell_{-\mathbf{a}}$, onde $-\mathbf{a}$ é o vector cujas componentes são formadas pelos simétricos, na aritmética módulo p, das componentes de $\mathbf{a}$. Portanto $\mathcal{L}_{[p]}^N$ é o espaço dual [1] de $G_{[p]}^N$. Verifica-se também que $G_{[p]}$ é um espaço linear. Como cada um dos N coeficientes de $\mathbf{a}$ pode tomar p valores então $\mathcal{L}_{[p]}^N$ contém p^N aplicações, ou seja, $\#\left(\mathcal{L}_{[p]}^N\right) = p^N$.

A aplicação φ que a cada vector $\mathbf{a} \in G_{[p]}^N$ associa $\ell_{\mathbf{a}} \in \mathcal{L}_{[p]}^N$, isto é, a aplicação definida pela relação $\varphi(\mathbf{a}) = \ell_{\mathbf{a}}(\cdot)$ é um isomorfismo, o que significa que $G_{[p]}^N$ e $\mathcal{L}_{[p]}^N$ são espaços lineares isomorfos, logo

$$dim\left(\mathcal{L}_{[p]}^N\right) = N.$$

[1] Recordando o espaço dual de um espaço linear V sobre o corpo $\mathbb{K}$ é o conjunto de todas as aplicações lineares de V em $\mathbb{K}$.

Para simplificar escreve-se ℓ_j em vez de $\ell_{\mathbf{a}_j}$, ou apenas ℓ, quando não existir perigo na omissão do vector dos coeficientes.

Teorema 17. *Sejam $\ell_1, ..., \ell_s \in \mathcal{L}_{[p]}^N$. As aplicações $\ell_1, ..., \ell_s$ são linearmente independentes se e só se os respectivos vectores dos coeficientes $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_s$ o forem também.*

Demonstração. Basta notar que à aplicação $\ell = \sum_{i=1}^{s} c_i \ell_i, i = 1, ..., s$ corresponde o vector dos coeficientes $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{s} c_i \mathbf{a}_i$ e que $G_{[p]}^N$ e $\mathcal{L}_{[p]}^N$ são espaços lineares isomorfos. □

Sejam as aplicações $\overline{\ell}_1, ..., \overline{\ell}_N \in \mathcal{L}_{[p]}^N$, tais que, $\overline{\ell}_j(\mathbf{x}) = x_j, j = 1, ..., N$. Como qualquer aplicação $\ell \in \mathcal{L}_{[p]}^N$ pode ser escrita na forma

$$\ell_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} a_j \overline{\ell}_j(\mathbf{x})$$

e $\mathcal{L}_{[p]}^N$ tem dimensão N, então $\left(\overline{\ell}_1, ..., \overline{\ell}_N\right)$ constitui uma base para $\mathcal{L}_{[p]}^N$.

Exemplo 9. *Sejam p=3 e N=2. Então $G_{[3]} = \{0, 1, 2\}$ e*

$$G_{[3]}^2 = \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2), (2,2)\}.$$

Uma forma rápida e prática de identificar os vectores de $G_{[3]}^2$ é construir uma tabela como a que se segue

	0	1	2
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)

Tab. 4.5: Vectores de $G_{[3]}^2$

$\mathbf{a} \in G_{[3]}^2$	$\ell_{\mathbf{a}} \in \mathcal{L}_{[3]}^2$
(0,0)	$\ell_{(0,0)}(\mathbf{x}) = 0x_1 + 0x_2 = 0 = \ell_{\mathbf{0}}(\mathbf{x})$
(1,0)	$\ell_{(1,0)}(\mathbf{x}) = 1x_1 + 0x_2 = x_1$
(2,0)	$\ell_{(2,0)}(\mathbf{x}) = 2x_1 + 0x_2 = 2x_1$
(0,1)	$\ell_{(0,1)}(\mathbf{x}) = 0x_1 + 1x_2 = x_2$
...	...
(2,2)	$\ell_{(2,2)}(\mathbf{x}) = 2x_1 + 2x_2$

Tab. 4.6: Aplicações de $\mathcal{L}_{[3]}^2$ e respectivos vectores dos coeficientes

Como a cada vector $\mathbf{a} \in G_{[3]}^2$ *corresponde uma aplicação* $\ell_{\mathbf{a}} \in \mathcal{L}_{[3]}^2$, *atendendo a (4.4) e com* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G_{[3]}^2$,

Portanto a família $\mathcal{L}_{[3]}^2$ *é*

$$\mathcal{L}_{[3]}^2 = \{l_{\mathbf{0}},\ x_1,\ 2x_1,\ x_2,\ x_1 + x_2,\ 2x_1 + x_2,\ 2x_2,\ x_1 + 2x_2,\ 2x_1 + 2x_2\}.$$

Os conjuntos $G_{[3]}^2$ *e* $\mathcal{L}_{[3]}^2$ *são espaços lineares isomorfos e têm dimensão finita*

$$\dim G_{[3]}^2 = \dim \mathcal{L}_{[3]}^2 = 2.$$

Em $\mathcal{L}_{[p]}^N$ pode-se definir uma relação h, tal que,

Definição 24. *(Relação-h) Dadas duas aplicações* $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_{[p]}^N$ *diz-se que* $\ell_1 h \ell_2$ *(*ℓ_1 *está na relação* h *com* ℓ_2*) se e só se*

$$\exists c \in G_{[p]} \backslash \{0\} : \ell_2 = c\ell_1. \tag{4.5}$$

Teorema 18. *A relação* h *é uma relação de equivalência em* $\mathcal{L}_{[p]}^N$.

Demonstração. Sejam as aplicações $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathcal{L}_{[p]}^N$, arbitrárias. Como $1\ell_1 = \ell_1$ tem-se que $\ell_1 h \ell_1$. Admitindo que $\ell_1 h \ell_2$ então $\ell_2 = c\ell_1$, com $c \neq 0$. Assim, $\ell_1 = c^{-1}\ell_2$, com $c^{-1} \neq 0$, pelo que, $\ell_2 h \ell_1$. Supondo que $\ell_1 h \ell_2$ e $\ell_2 h \ell_3$, então $\ell_2 = c_1\ell_1$ e $\ell_3 = c_2\ell_2$ com $c_1, c_2 \neq 0$. Logo $\ell_3 = (c_2c_1)\,\ell_1$, com $c_2c_1 \neq 0$, ou seja, $\ell_1 h \ell_3$. Como a relação h é reflexiva, simétrica e transitiva é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_{[p]}^N$. $\square$

Para $\ell \in \mathcal{L}_{[p]}^N$, o conjunto $[\ell]_h = \{\ell^\circ \in \mathcal{L}_{[p]}^N : \ell^\circ h \ell\}$ é a classe de equivalência de ℓ na relação h. Estas classes designam-se por classes de equivalência-h. Duas aplicações lineares de $\mathcal{L}_{[p]}^N$ que pertençam à mesma classe de equivalência-h dizem-se h-equivalentes. É evidente que a única aplicação h-equivalente a $\ell_{\mathbf{0}}$ é a própria aplicação $\ell_{\mathbf{0}}$, portanto, $[\ell_{\mathbf{0}}]_h = \{\ell_{\mathbf{0}}\}$. As restantes classes de equivalência $[\ell]_h$, tais que, $[\ell]_h \neq [\ell_{\mathbf{0}}]_h$, contêm $p-1$ aplicações, tantas quantos os valores diferentes de zero que c pode tomar. Assim em $\mathcal{L}_{[p]}^N$ há

$$m = \frac{p^N - 1}{p - 1}$$

classes de equivalência-h distintas da classe $[\ell_{\mathbf{0}}]_h$. Então a relação h divide o conjunto $\mathcal{L}_{[p]}^N$ em $m+1$ classes de equivalência-h que constituem uma partição de $\mathcal{L}_{[p]}^N$, ou seja,

$$\begin{cases} [\ell_1]_h \cap [\ell_2]_h = \emptyset, \quad \ell_1 \neq \ell_2 \\ \bigcup\limits_{\ell} [\ell]_h = \mathcal{L}_{[p]}^N. \end{cases}$$

Definição 25. *Uma aplicação $\ell \in \mathcal{L}_{[p]}^N$ cujo primeiro coeficiente não nulo é 1 designa-se por aplicação reduzida.*

Representa-se a família das aplicações lineares reduzidas de $\mathcal{L}_{[p]}^N$ por $\mathcal{L}_{r[p]}^N$. Seja a aplicação $\ell_{\mathbf{a}} \in \mathcal{L}_{[p]}^N - \mathcal{L}_{r[p]}^N$ e α o seu primeiro coeficiente não nulo o qual é diferente de 1. Para obter a aplicação linear reduzida h-equivalente a $\ell_{\mathbf{a}}$, considera-se c^{-1} e $c^{-1}\mathbf{a}$, obtendo-se $\ell_{(c^{-1}\mathbf{a})}$. Se $\ell_{\mathbf{a}} \in \mathcal{L}_{r[p]}^N$ a aplicação linear reduzida h-equivalente a $\ell_{\mathbf{a}}$ é a própria.

Verifica-se que,

Teorema 19. *Em cada classe de equivalência-h, distinta da classe que contém a aplicação nula, há uma e uma só aplicação reduzida.*

Demonstração. Sejam ℓ_1, ℓ_2 duas aplicações lineares reduzidas pertencentes à mesma classe de equivalência-h, distinta da classe que contém a aplicação nula. Então os primeiros coeficientes não nulos de ℓ_1, ℓ_2 são iguais a 1 e existe $c \neq 0$, tal que, $\ell_2 = c\ell_1$. Portanto o índice dos primeiros coeficientes iguais a 1 tem que ser o mesmo, pelo que $\ell_1 = \ell_2$. □

Como em $\mathcal{L}_{[p]}^N$ há $\frac{p^N-1}{p-1}$ classes de equivalência-h, distintas da que contém a aplicação nula e, em cada uma dessas classes há apenas uma aplicação reduzida, então em $\mathcal{L}_{[p]}^N$ há $m = \frac{p^N-1}{p-1}$ aplicações reduzidas, ou seja,

$$\#\left(\mathcal{L}_{r[p]}^N\right) = m.$$

Exemplo 10. *(Continuação do exemplo 9)*
O espaço linear $\mathcal{L}_{[3]}^2$ contém $p^N = 3^2 = 9$ aplicações, das quais, $m = \frac{3^2-1}{3-1} = 4$ são reduzidas,

$$\mathcal{L}_{r[3]}^2 = \{x_1, x_2, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\}.$$

O espaço $\mathcal{L}_{[3]}^2$ decompõe-se em 4 classes de equivalência-h distintas da classe que contém a aplicação nula $\ell_{\mathbf{0}}$. Como cada classe de equivalência-h, distinta da classe $[\ell_{\mathbf{0}}]_h$, tem apenas uma aplicação reduzida, multiplicando cada aplicação de $\mathcal{L}_{r[3]}^2$ por 2 e tendo em conta (4.5) obtêm-se essas classes

$$\{x_1, 2x_1\}, \{x_2, 2x_2\}, \{x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2\} \text{ e } \{x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2\}.$$

Teorema 20. *Sejam $\ell_1, ..., \ell_s \in \mathcal{L}^N_{[p]}$ e $\ell^\circ_1, ..., \ell^\circ_s \in \mathcal{L}^N_{r[p]}$ as aplicações lineares reduzidas h-equivalentes a $\ell_1, ..., \ell_s$, respectivamente. Então, $\ell_1, ..., \ell_s$ são linearmente independentes se e só se $\ell^\circ_1, ..., \ell^\circ_s$ o forem também.*

Demonstração. Sendo $\ell^\circ_1, ..., \ell^\circ_s \in \mathcal{L}^N_{r[p]}$ aplicações reduzidas, h-equivalentes a $\ell_1, ..., \ell_s$, respectivamente, tem-se que

$$\mathbf{a}^\circ_i = c_i^{-1}\mathbf{a}_i,\ com\ c_i^{-1} \neq 0,\ para\ i = 1, ..., s \tag{4.6}$$

ou equivalentemente,

$$\mathbf{a}_i = c_i\mathbf{a}^\circ_i,\ com\ c_i \neq 0,\ para\ i = 1, ..., s. \tag{4.7}$$

Tendo em conta (4.6) e (4.7) verifica-se que $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_s$ são linearmente independentes se e só se $\mathbf{a}^\circ_1, ..., \mathbf{a}^\circ_s$ forem linearmente independentes. Pelo Teorema 17 verifica-se que $\ell_1, ..., \ell_s$ são linearmente independentes se e só se $\ell^\circ_1, ..., \ell^\circ_s$ o forem também. $\square$

Assim podem considerar-se bases de $\mathcal{L}^N_{[p]}$ ou de um seu subespaço constituídas por aplicações reduzidas.

Sem perda de generalidade os vectores $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N) \in G^N_{[p]}$ podem ser ordenados atribuindo-lhes os índices

$$j = 1 + \sum_{i=1}^{N} p^{i-1}x_i, j = 1, ..., p^N \tag{4.8}$$

onde $\mathbf{x}_j$ representa o vector com índice j, $j = 1, ..., p^N$. Da mesma forma é possível ordenar as aplicações lineares de $\mathcal{L}^N_{[p]}$ pela ordem dos vectores dos seus coeficientes de 1 até p^N, ou seja, $\ell_{\mathbf{a}_1}, ..., \ell_{\mathbf{a}_{p^N}}$. Para ordenar as aplicações reduzidas podem-se substituir os índices $j = 1, ..., p^N$ dos vectores dos coeficientes $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{p^N}$ pelos índices $h = 1, ..., m$ respeitando a ordem inicial, ou seja, se $j_1 < j_2$ então $h_1 < h_2$. Veja-se o exemplo seguinte.

Exemplo 11. *(Continuação dos exemplos 9 e 10)*
De acordo com (4.8), *os índices dos vectores* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G^2_{[3]}$ *são dados por*

$$j = 1 + \sum_{i=1}^{2} 3^{i-1} x_i = 1 + x_1 + 3x_2$$

com $j = 1, ..., 9$. *Assim,*

vector	índice	vector	índice
$(0,0)$	j=1	$(2,1)$	j=6
$(1,0)$	j=2	$(0,2)$	j=7
$(2,0)$	j=3	$(1,2)$	j=8
$(0,1)$	j=4	$(2,2)$	j=9
$(1,1)$	j=5		

Tab. 4.7: Vectores de $G^2_{[3]}$ e respectivos índices

ou seja, de acordo com (4.8) a ordem dos vectores de $G^2_{[3]}$ *é*

$$\mathbf{x}_1 = (0,0) \quad \mathbf{x}_2 = (1,0) \quad \mathbf{x}_3 = (2,0) \quad ... \quad \mathbf{x}_8 = (1,2) \quad \mathbf{x}_9 = (2,2).$$

Pela ordem dos vectores dos seus coeficientes ordenam-se as aplicações de $\mathcal{L}^2_{[3]}$ *(ver a 2ª tabela do exemplo 9) ficando*

$$l_{\mathbf{0}} \quad x_1 \quad 2x_1 \quad x_2 \quad x_1 + x_2 \quad 2x_1 + x_2 \quad 2x_2 \quad x_1 + 2x_2 \quad 2x_1 + 2x_2.$$

Mantendo a ordem das aplicações lineares de $\mathcal{L}^2_{[3]}$ *ordenam-se as aplicações reduzidas de* $\mathcal{L}^2_{r[3]}$ *de 1 até* $m = 4$ *ficando*

$$x_1 \quad x_2 \quad x_1 + x_2 \quad x_1 + 2x_2.$$

Definição 26. *Sejam $\ell_1, ..., \ell_s \in \mathcal{L}_{[p]}^N$ aplicações linearmente independentes. O conjunto de tratamentos definido por*

$$\left\{ \mathbf{x} \in G_{[p]}^N : \ell_1(\mathbf{x}) = b_1, ..., \ell_s(\mathbf{x}) = b_s \right\} \tag{4.9}$$

com $b_1, ..., b_s \in G_{[p]}$ designa-se por bloco. Representa-se este conjunto por $[\mathbf{L}|\mathbf{b}]$ onde $\mathbf{L} = (\ell_1, ..., \ell_s)$ e $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_s)$.

Como cada componente de $(b_1, ..., b_s)$ pode tomar p valores então existem p^s blocos.

Teorema 21. *Cada bloco $[\mathbf{L}|\mathbf{b}]$, com $\mathbf{b} \in G_{[p]}^N$, tem p^{N-s} tratamentos.*

Demonstração. Considerando

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sN} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

em que as linhas da matriz $\mathbf{A}$ correspondem aos vectores de coeficientes $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_s$ das aplicações $\ell_1, ..., \ell_s$, tem-se

$$\mathbf{x} \in [\mathbf{L}|\mathbf{b}] \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Como as aplicações $\ell_1, ..., \ell_s$ são linearmente independentes, $car(\mathbf{A}) = s$. Sem perda de generalidade considera-se que as primeiras s colunas da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes. Então a matriz

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

é invertível e

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \sum_{j=s+1}^{N} a_{1j}x_j \\ \cdots \\ b_s - \sum_{j=s+1}^{N} a_{sj}x_j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_s \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1^{-1} \begin{pmatrix} b_1 - \sum_{j=s+1}^{N} a_{1j}x_j \\ \cdots \\ b_s - \sum_{j=s+1}^{N} a_{sj}x_j \end{pmatrix},$$

ou seja, é possível escrever as primeiras s componentes de $\mathbf{x}$ como combinações lineares das restantes $N - s$. Como cada componente pode tomar p valores então existem p^{N-s} escolhas possíveis para $x_{s+1}, ..., x_N$, ou seja, $\# [\mathbf{L}|\mathbf{b}] = p^{N-s}$. $\square$

Evidentemente que os p^s blocos $[\mathbf{L}|\mathbf{b}]$, $\mathbf{b} \in G_{[p]}^N$, constituem uma partição de $G_{[p]}^N$, ou seja,

$$\begin{cases} [\mathbf{L}|\mathbf{b}] \cap [\mathbf{L}|\mathbf{b}'] = \emptyset, \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{b}' \\ \bigcup_{\mathbf{b}} [\mathbf{L}|\mathbf{b}] = G_{[p]}^N. \end{cases}$$

Corolário 4. *Seja $\ell \in \mathcal{L}_{[p]}^N$. Cada bloco*

$$[\ell|b] = \{\mathbf{x} : \ell(\mathbf{x}) = b\}, b \in G_{[p]}$$

tem p^{N-1} tratamentos. Como b pode tomar p valores existem p blocos destes que constituem uma partição de $G_{[p]}^N$.

Exemplo 12. *Sejam $p = N = 3$ e $G_{[3]} = \{0, 1, 2\}$. Considerando, por exemplo, as aplicações $x_1 + 2x_2$ e $x_1 + x_2 + 2x_3$ $(s = 2)$ linearmente independentes, cada bloco é constituído pelas soluções das equações*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2 \end{cases} \tag{4.10}$$

com $b_1, b_2 \in G_3$. Existem 9 ($p^s = 3^2$) blocos, cada um com 3 ($p^{N-s} = 3$) tratamentos. Dado que em $G_{[3]}$ o simétrico de 1 é 2 e o inverso de 2 é 1 resolve-se o sistema (4.10) obtendo-se

$$\begin{cases} x_2 = 2b_1 + x_1 \\ x_1 + (2b_1 + x_1) + 2x_3 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2b_1 + x_1 \\ x_3 = 2b_1 + 2b_2 + 2x_1 \end{cases}$$

com $b_1,\ b_2,\ x_1 \in G_{[3]} = \{0,1,2\}$. Por exemplo, para o par $(b_1, b_2) = (0,0)$ a partir de x_1 calculam-se os valores de x_2 e x_3 obtendo-se o bloco

$$\{(0,0,0),(1,1,2),(2,2,1)\}.$$

Considerando as restantes possibilidades para $b_1,\ b_2,$ e x_1 obtêm-se os outros blocos

$$\{(0,0,2),(1,1,1),(2,2,0)\},\{(0,0,1),(1,1,0),(2,2,2)\},\{(0,2,2),(1,0,1),(2,1,0)\}$$
$$\{(0,2,1)\ (1,0,0)\ (2,1,2)\},\{(0,2,0)\ (1,0,2)\ (2,1,1)\},\{(0,1,1)\ (1,2,0)\ (2,0,2)\}$$
$$\{(0,1,0),(1,2,2),(2,0,1)\},\{(0,1,2),(1,2,1),(2,0,0)\}.$$

Teorema 22. *Sejam $\ell_1, ..., \ell_s \in \mathcal{L}^N_{[p]}$ aplicações linearmente independentes e $\ell_1^\circ, ..., \ell_s^\circ \in \mathcal{L}^N_{r[p]}$ as aplicações lineares reduzidas h-equivalentes a $\ell_1, ..., \ell_s$, respectivamente. Verifica-se que*

$$[\mathbf{L}|\mathbf{b}] = [\mathbf{L}^\circ|\mathbf{b}^\circ]$$

com $\mathbf{L}^\circ = (\ell_1^\circ, ..., \ell_s^\circ),\ \mathbf{b} = (b_1^\circ, ..., b_s^\circ),\ onde\ b_i^\circ = c_i^{-1}b_i,\ para\ i = 1, ..., s.$

Demonstração. Tendo em conta (4.7),

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}|\mathbf{b}] &= \{\mathbf{x} : \ell_i(\mathbf{x}) = b_i, i = 1, ..., s\} = \{\mathbf{x} : c_i\ell_i^\circ(\mathbf{x}) = b_i, i = 1, ..., s\} \\ &= \left\{\mathbf{x} : \ell_i^\circ(\mathbf{x}) = c_i^{-1}b_i, i = 1, ..., s\right\} = [\mathbf{L}^\circ|\mathbf{b}^\circ] \end{aligned}$$

considerando $b_i^\circ = c_i^{-1}b_i, i = 1, ..., s.$ □

Assim, se em vez das aplicações $\ell_1, ..., \ell_s$ se se considerarem as respectivas aplicações h-equivalentes reduzidas $\ell_1^\circ, ..., \ell_s^\circ$ (também linearmente independentes, ver Teorema 20) obtem-se a mesma partição de $G_{[p]}^N$. Face ao exposto sobre aplicações lineares reduzidas (Teoremas 19, 20 e 22) e para evitar redundâncias na exposição que se segue utilizam-se apenas aplicações reduzidas.

Definição 27. *A ordem de uma aplicação linear reduzida é o número dos seus coeficientes não nulos menos 1 e representa-se por* $O(\ell)$, *onde* $\ell \in \mathcal{L}_{r[p]}^N$.

Num factorial p^N às aplicações reduzidas de ordem zero correspondem os efeitos dos factores principais. Às aplicações reduzidas de ordem superior a zero correspondem as interacções factoriais entre os factores que nela figurem com coeficientes não nulos.

Exemplo 13. *Retomando o exemplo 10, num factorial* 3^2, *às aplicações reduzidas de ordem zero,* x_1 *e* x_2, *correspondem os efeitos dos factores principais. Às aplicações de ordem um,* $x_1 + x_2$ *e* $x_1 + 2x_2$ *corresponde a interacção entre os dois factores.*

Sejam os vectores $\mathbf{x}_j \in G_{[p]}^N, j = 1, ..., p^N$ e as aplicações lineares reduzidas $\ell_h \in \mathcal{L}_{r[p]}^N, h = 1, ..., m$ ordenados de acordo com (4.8). Para cada aplicação linear reduzida $\ell_h \in \mathcal{L}_{r[p]}^N, h = 1, ..., m$ define-se a matriz $\mathbf{C}(\ell_h), h = 1, ..., m$, do tipo $p \times p^N$, com elementos

$$c_{i,j}(\ell_h) = \begin{cases} 1, & \ell_h(\mathbf{x}_j) = i - 1 \\ 0, & \ell_h(\mathbf{x}_j) \neq i - 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

com $i = 1, ..., p$, $j = 1, ..., p^N$ e $\mathbf{x}_j \in G_{[p]}^N$. Na linha i da matriz $\mathbf{C}(\ell_h)$ os elementos que correspondem aos tratamentos em que ℓ_h toma o valor $i - 1$ são iguais a 1 e os restantes elementos são nulos. Utilizando a noção de bloco, (4.11) é equivalente a

$$c_{i,j}(\ell_h) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_j \in [\ell_h | i-1] \\ 0, & \mathbf{x}_j \notin [\ell_h | i-1] \end{cases}$$

onde $[\ell_h | i-1] = \{\mathbf{x} : \ell_h(\mathbf{x}) = i-1\}$, $i = 1, ..., p$.

Exemplo 14. *Retomando o exemplo 11, para $p = 3$ e $N = 2$ vem*

$$\begin{aligned} G^2_{[3]} &= \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (1,2), (2,2)\} \\ \mathcal{L}^2_{r[3]} &= \{\ x_1,\ x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2\}. \end{aligned}$$

Cada coluna das matrizes $\mathbf{C}(x_1)$, $\mathbf{C}(x_2)$, $\mathbf{C}(x_1+x_2)$ e $\mathbf{C}(x_1+2x_2)$ (que são do tipo 3×9) está associada a um vector $\mathbf{x} \in G^2_{[3]}$, os quais estão ordenados de acordo com (4.8), ou seja,

$$\begin{array}{r|ccccccccc} \text{vector } \mathbf{x}_j & (0,0) & (1,0) & (2,0) & (0,1) & (1,1) & (2,1) & (0,2) & (1,2) & (2,2) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{coluna } j & j{=}1 & j{=}2 & j{=}3 & j{=}4 & j{=}5 & j{=}6 & j{=}7 & j{=}8 & j{=}9 \end{array}$$

$\boxed{\textit{Matriz } \mathbf{C}(x_1)}$

Tendo em conta a tabela

$\ell_1(\mathbf{x}) = x_1$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2

Tab. 4.8: Tabela da aplicação $\ell_1(\mathbf{x}) = x_1$

obtêm-se os blocos

$$\begin{aligned}
[\ell_1|0] &= \left\{\mathbf{x} \in G^2_{[3]} : \ell_1(\mathbf{x}) = 0\right\} = \left\{\mathbf{x} \in G^2_{[3]} : \mathbf{x}_1 = 0\right\} = \{(0,0),(0,1),(0,2)\} \\
[\ell_1|1] &= \left\{\mathbf{x} \in G^2_{[3]} : \ell_1(\mathbf{x}) = 1\right\} = \left\{\mathbf{x} \in G^2_{[3]} : \mathbf{x}_1 = 1\right\} = \{(1,0),(1,1),(1,2)\} \\
[\ell_1|2] &= \left\{\mathbf{x} \in G^2_{[3]} : \ell_1(\mathbf{x}) = 2\right\} = \left\{\mathbf{x} \in G^N_{[p]} : \mathbf{x}_1 = 2\right\} = \{(2,0),(2,1),(2,2)\}.
\end{aligned}$$

Na linha $i = 1$ os elementos associados aos tratamentos que pertencem ao bloco $[\ell_1|0]$ são iguais a 1 e os restantes são nulos. Portanto a 1ª linha da matriz $\mathbf{C}(x_1)$ é

1 0 0 1 0 0 1 0 0.

Na linha $i = 2$ os elementos associados aos tratamentos que pertencem ao bloco $[\ell_1|1]$ são iguais a 1 e os restantes são nulos, pelo que, os elementos da 2ª linha são

0 1 0 0 1 0 0 1 0.

Da mesma forma obtém-se a 3ª linha $(i = 3)$

0 0 1 0 0 1 0 0 1

onde os elementos iguais a 1 correspondem aos vectores que pertencem ao bloco $[\ell_1|2]$ e os elementos iguais a zero aos tratamentos que não pertencem ao bloco $[\ell_1|2]$. Então

$$\mathbf{C}(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Matrizes } \mathbf{C}(x_2),\ \mathbf{C}(x_1 + x_2) \text{ e } \mathbf{C}(x_1 + 2x_2).}$

Considerando as tabelas para as restantes aplicações da família $\mathcal{L}^2_{r[3]}$

os blocos são

$[\ell_2|0] = \{(0,0),(1,0),(2,0)\}$ $[\ell_2|1] = \{(0,1),(1,1),(2,1)\}$ $[\ell_2|2] = \{(0,2),(1,2),(2,2)\}$

$\ell_2(\mathbf{x})=x_2$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	2
2	0	1	2

$\ell_3(\mathbf{x})=x_1+x_2$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\ell_4(\mathbf{x})=x_1+2x_2$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Tab. 4.9: Tabelas das plicações $\ell_2(\mathbf{x}) = x_2,\ \ell_3(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ e $\ell_4(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$

$[\ell_3|0] = \{(0,0),(2,1),(1,2)\}$ $[\ell_3|1] = \{(1,0),(0,1),(2,2)\}$ $[\ell_3|2] = \{(2,0),(1,1),(0,2)\}$

$[\ell_4|0] = \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$ $[\ell_4|1] = \{(1,0),(2,1),(0,2)\}$ $[\ell_4|2] = \{(2,0),(0,1),(1,2)\}$

e as matrizes

$$\mathbf{C}(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(x_1 + 2x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como duas quaisquer aplicações lineares reduzidas distintas são linearmente independentes verificam-se as propriedades seguintes relativamente às matrizes definidas em (4.11).

Teorema 23. *Sejam $\ell_h, \ell_{h'} \in \mathcal{L}^N_{r[p]}$ com $h, h' = 1, ..., m$ onde $h \neq h'$ e as respectivas matrizes associadas $\mathbf{C}(\ell_h), \mathbf{C}(\ell_{h'})$ dadas por (4.11). Então* *a)* $\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{1}_{p^N} = p^{N-1}\mathbf{1}_p$,

b) $\mathbf{1}'_p\mathbf{C}(\ell_h) = \mathbf{1}'_{p^N}$,

c) $\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{C}'(\ell_h) = p^{N-1}\mathbf{I}_p$,

d) $\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{C}'(\ell_{h'}) = p^{N-2}\mathbf{J}_p$.

Demonstração. Sejam $\ell_h, \ell_{h'} \in \mathcal{L}^N_{r[p]}$ e $\mathbf{C}(\ell_h), \mathbf{C}(\ell_{h'})$ as respectivas matrizes, com $h \neq h'$.

a) Como $\#[\mathrm{L}_h|i-1] = p^{N-1},\ i = 1, ..., p$, ver Corolário 4, significa que em cada linha da matriz $\mathbf{C}(\ell_h)$ há p^{N-1} elementos iguais a 1 e os restantes são nulos, pelo que, a soma dos elementos de cada linha da matriz $\mathbf{C}(\ell_h)$ é igual a p^{N-1}, pelo que, $\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{1}_{p^N} = p^{N-1}\mathbf{1}_p$.

b) Imediato, por (4.11) e pelo facto de ℓ_h ser uma aplicação. Isto significa que em cada coluna da matriz $\mathbf{C}(\ell_h)$ há um único elemento igual a 1.

c) Os elementos principais da matriz $\mathbf{C}(l_h)\mathbf{C}'(l_h)$ correspodem ao produto interno entre vectores de linhas iguais de $\mathbf{C}(l_h)$. Os restantes elementos correspondem ao produto interno entre vectores de linhas distintas. Tendo em conta a) e b) deste Teorema, os elementos principais de $\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{C}'(\ell_h)$ são iguais a p^{N-1} e os elementos não principais são nulos, pelo que, $\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{C}'(\ell_h) = p^{N-1}\mathbf{I}_p$.

d) Cada elemento da matriz $\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{C}'(\ell_{h'})$ corresponde ao produto interno entre um vector linha de $\mathbf{C}(\ell_h)$ e um vector linha de $\mathbf{C}(\ell_{h'})$. Como $\#[\ell_h, \ell_{h'}|i-1,\ i-1] = p^{N-2}, i = 1, ..., p$, ver Teorema 21, então $\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{C}'(\ell_{h'}) = p^{N-2}\mathbf{J}_p$.

$\square$

Seja $\mathbf{K}_p$ uma matriz, do tipo $p \times (p-1)$, que se obtém de uma matriz ortogonal estandardizada, de ordem p, eliminando a primeira coluna igual a $\frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{1}_p$ (ver Anexo A.4). Para cada aplicação linear reduzida $\ell_h \in \mathcal{L}^N_{r[p]},\ h = 1, ..., m$ define-se a matriz, do tipo $p^N \times (p-1)$, dada por

$$\mathbf{A}(\ell_h) = \frac{1}{\sqrt{p^{N-1}}}\ \mathbf{C}'(\ell_h)\ \mathbf{K}_p,\ h = 1, ..., m \tag{4.12}$$

e $\mathbf{C}(\ell_h)$ definida por (4.11).

Teorema 24. *Sejam $\ell_h, \ell_{h'} \in \mathcal{L}^N_{r[p]}$, com $h, h' = 1, ..., m$ onde $h \neq h'$ e as respectivas matrizes $\mathbf{A}(\ell_h), \mathbf{A}(\ell_{h'})$ dadas por (4.12). Então*

a) $\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{1}_{p^N} = \mathbf{0}_{(p-1)\times 1}$,

b) $\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{A}(\ell_h) = \mathbf{I}_{p-1}$,

c) $\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{A}(\ell_{h'}) = \mathbf{0}_{(p-1)\times(p-1)}$.

Demonstração. Sejam $\ell_h, \ell_{h'} \in \mathcal{L}^N_{r[p]}$, com $h, h' = 1, ..., m$ e $h \neq h'$. Tendo em conta (4.12), o Teorema 23 e as propriedades da matriz $\mathbf{K}_p$ (ver Anexo A.4) verifica-se

a) $\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{1}_{p^N} = \frac{1}{\sqrt{p^{N-1}}}\mathbf{K}'_p\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{1}_{p^N} = \sqrt{p^{N-1}}\mathbf{K}'_p\mathbf{1}_p = \mathbf{0}_{(p-1)\times 1}$, o que significa que a soma dos elementos de cada coluna da matriz $\mathbf{A}(\ell_h)$ é igual a zero. [2]

b) $\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{A}(\ell_h) = \frac{1}{p^{N-1}}\mathbf{K}'_p\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{C}'(\ell_h)\mathbf{K}_p = \mathbf{K}'_p\mathbf{I}_p\mathbf{K}_p = \mathbf{I}_{p-1}$, ou seja, o produto interno entre os vectores de colunas iguais da matriz $\mathbf{A}(\ell_h)$ é igual a 1 e produto interno entre vectores de colunas distintas é zero.

c) $\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{A}(\ell_{h'}) = \frac{1}{p^{N-1}}\mathbf{K}'_p\mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{C}'(\ell_{h'})\mathbf{K}_p = \frac{p^{N-2}}{p^{N-1}}\mathbf{K}'_p\mathbf{J}_p\mathbf{K}_p = \frac{1}{p}\mathbf{K}'_p\mathbf{1}_p\mathbf{1}'_p\mathbf{K}_p = \mathbf{0}_{(p-1)\times(p-1)}$, portanto o produto interno entre os vectores coluna de $\mathbf{A}(\ell_h)$ e os vectores coluna de $\mathbf{A}(\ell_{h'})$ é igual a zero.

[2] As matrizes $\mathbf{A}(\ell_h)$ são matrizes de contrastes (ver Anexo A.4).

$\square$

Exemplo 15. *Seja, por exemplo, a matriz ortogonal estandardizada de ordem 3 (ver anexo A.4)*

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1}_3 \;\; \mathbf{K}_3 \right), \; com \; \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Retomando o exemplo 14 e tendo em conta (4.12), as matrizes $\mathbf{A}(x_1)$, $\mathbf{A}(x_2)$, $\mathbf{A}(x_1 + x_2)$ *e* $\mathbf{A}(x_1 + 2x_2)$, *são, respectivamente*

$$\mathbf{A}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

$$\mathbf{A}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

$$\mathbf{A}(x_1{+}x_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{A}(x_1{+}2x_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Teorema 25. *A matriz*

$$\mathbf{P}\left(p^N\right) = [\mathbf{A}_0 \ \mathbf{A}(\ell_1) \ \cdots \ \mathbf{A}(\ell_m)]$$

com $\mathbf{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{p^N}}\mathbf{1}_{p^N}$ *e* $\mathbf{A}(\ell_h), h = 1, ..., m$ *dadas por (4.12), é uma diagonalizadora ortogonal associada à AJC, completa e regular, que se representa por* $\mathcal{A}\left(p^N\right)$, *cuja base principal é*

$$bp\left(\mathcal{A}\left(p^N\right)\right) = \{\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}(\ell_1), ..., \mathbf{Q}(\ell_m)\}$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{p^N}}\mathbf{1}_{p^N}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{p^N}}\mathbf{1}_{p^N}\right)' = \frac{1}{p^N}\mathbf{J}_{p^N} \\ \mathbf{Q}(\ell_h) = \mathbf{A}(\ell_h)\mathbf{A}'(\ell_h), \ h = 1, ..., m \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Teorema 24 e como $\frac{1}{p^N}\mathbf{1}'_{p^N}\mathbf{1}_{p^N} = 1$ a matriz $\mathbf{P}\left(p^N\right)$ é ortogonal. Como as matrizes $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}(\ell_1), ..., \mathbf{Q}(\ell_m)$ são simétricas, idempotentes e mutuamente ortogonais constituem uma $FMPOMO$, são linearmente independentes pelo que constituem uma base para a AJC que se representa por $\mathcal{A}\left(p^N\right)$. Pelo Teorema 2 esta família é a base principal desta AJC. Como $car\left(\sum_{h=0}^{m}\mathbf{Q}(\ell_h)\right) = p^N$, então $\mathcal{A}\left(p^N\right)$ é uma AJC completa. Dado que $\frac{1}{p^N}\mathbf{J}_{p^N} \in \mathcal{A}\left(p^N\right)$ a AJC também é regular. $\square$

Atendendo aos Teoremas 12, 13 e Corolário 2, (da secção 2.3) vem

Corolário 5. *A matriz*

$$\mathbf{P}\left(rp^N\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{rp^N}}\mathbf{1}_{rp^N} \quad \mathbf{A}(\ell_1) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r \ \cdots \ \mathbf{A}(\ell_m) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r \quad \mathbf{A}_{m+1}\right]$$

com $\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{I}_{p^N} \otimes \mathbf{K}_r$ *é uma diagonalizadora ortogonal associada à* AJC *completa e regular* $\mathcal{A}\left(p^N\right) \star \mathcal{A}(r)$, *cuja base principal é*

$$bp\left(\mathcal{A}\left(p^N \star \mathcal{A}(r)\right)\right) = \left\{\frac{1}{rp^N}\mathbf{J}_{rp^N},\ \mathbf{Q}(\ell_1) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, ...,\ \mathbf{Q}(\ell_m) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r,\ \mathbf{Q}_{m+1}\right\}$$

onde $\mathbf{Q}_{m+1} = \mathbf{A}_{m+1}\mathbf{A}'_{m+1}$.

O modelo linear estritamente associado à AJC completa e regular $\mathcal{A}\left(p^N\right) \star \mathcal{A}(r)$ é

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{rp^N}}\mathbf{1}_{rp^N}\mu + \sum_{h=1}^{m}\left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\boldsymbol{\beta}(\ell_h) + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.17}$$

onde μ representa a média global e $\boldsymbol{\beta}(l_h), h = 1, ..., m$ são vectores de parâmetros associados aos efeitos principais, se $O(\ell_h) = 0$ e associados a interacções factoriais entre os factores que figurem em ℓ_h com coeficientes não nulos, se $O(\ell_h) > 0$. Na forma canónica o modelo (4.17) é dado por

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{rp^N}}\mathbf{1}_{rp^N}W_0 + \sum_{h=1}^{m}\left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\mathbf{W}(\ell_h) + \mathbf{A}_{m+1}\mathbf{W}_{m+1} \tag{4.18}$$

onde

$$\begin{cases} W_0 = \frac{1}{\sqrt{rp^N}}\mathbf{1}'_{rp^N}\mathbf{Y} \\ \mathbf{W}(l_h) = \left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\mathbf{Y} \quad h = 1, ..., m \\ \mathbf{W}_{m+1} = \mathbf{A}'_{m+1}\mathbf{Y} \end{cases} \tag{4.19}$$

e $\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{I}_{p^N} \otimes \mathbf{K}_r$. Considerando

$$\begin{cases} S(\ell_h) = ||\mathbf{W}(\ell_h)||^2 \quad h = 1, ..., m \\ S = ||\mathbf{W}_{m+1}||^2 \end{cases}$$

onde $\mathbf{W}(\ell_h), h = 1, ..., m$ e $\mathbf{W}_{m+1}$ são dados por (4.19), T é a soma de todas as observações e $\mathbf{T}(\ell)$ o vector cujas componentes são os totais das observações para os tratamentos que pertencem ao bloco $[\ell|b], b = 0, ..., p-1$ verifica-se que

$$SQT = ||\mathbf{Y}||^2 - \frac{T^2}{rp^N} = \sum_{h=1}^{m} S(\ell_h) + S$$

e

$$S(\ell_h) = \frac{1}{rp^{N-1}}\|\mathbf{T}(\ell_h)\|^2 - \frac{T^2}{rp^N},\ h = 1, ..., m.$$

Verifica-se também que

$$S(\ell'_{h'}) = S(\ell_h)$$

onde $\ell'_{h'}$ é uma aplicação de $\mathcal{L}^N_{[p]}$, h-equivalente a ℓ_h.

Assumindo que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_{rp^N}\right)$, tem-se que $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_{rp^N}\right)$, com $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\circ \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r$ e

$$\boldsymbol{\mu}^\circ = \frac{1}{\sqrt{p^N}}\mathbf{1}_{p^N}\mu + \sum_{h=1}^{m}\mathbf{A}(\ell_h)\boldsymbol{\beta}(\ell_h).$$

Tendo em conta as secções 3.1 e 3.2 verifica-se que

$$\begin{cases} \mathbf{W}(\ell_h) \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}\left(\ell_h\right), \sigma^2\mathbf{I}_{p-1}\right) \quad h = 1, ..., m \\ S \sim \sigma^2\chi^2_{p^N(r-1)} \end{cases} \tag{4.20}$$

onde

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\ell_h\right) = \left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu}$$

e também que $\mathbf{W}(l_h), h = 1, ..., m$ são *UMVUE*'s para $\boldsymbol{\lambda}\left(\ell_h\right), h = 1, ..., m$ e $\frac{S}{p^N(r-1)}$ para σ^2. Considerando as hipóteses

$$H_0\left(\ell_h\right) : \boldsymbol{\lambda}\left(\ell_h\right) = \mathbf{0}, \ h = 1, ..., m \tag{4.21}$$

testa-se a ausência do efeito principal associado à aplicação reduzida ℓ_h, se $O\left(\ell_h\right) = 0$ e testa-se a ausência da interacção factorial entre os factores que figuram em ℓ_h com coeficientes não nulos, se $O\left(\ell_h\right) > 0$. Verifica-se, sob validade de $H_0\left(\ell_h\right)$, que

$$S_0\left(\ell_h\right) \sim \sigma^2\chi^2_{p-1}, \ h = 1, ..., m$$

e como $S_0\left(\ell_h\right)$ e S são variáveis aleatórias independentes então,

$$F_0\left(\ell_h\right) = \frac{p^N(r-1)}{p-1}\frac{S(\ell_h)}{S} \sim \mathcal{F}_{p-1,p^N(r-1)}, \ h = 1, ..., m.$$

Deve rejeitar-se $H_0\left(\ell_h\right)$, para um nível de significância α, se

$$F_0\left(\ell_h\right) > f_{(p-1,p^N(r-1),1-\alpha)}$$

onde $f_{(p-1,p^N(r-1))}$ é o quantil da distribuição $\mathcal{F}$ com $p-1$ e $p^N(r-1)$ graus de liberdade para a probabilidade $1-\alpha$.

Utilizando os resultados da secção 3.2 e tendo em conta que $S \sim \sigma^2\chi^2_{p^N(r-1)}$ e que $\frac{S}{p^N(r-1)}$ é *UMVUE* para σ^2 é possível realizar a inferência para σ^2.

Exemplo 16. *Num factorial $p^N = 3^2$ com r réplicas, considerando as hipóteses*

$$H_0\left(x_1\right) : \boldsymbol{\lambda}\left(x_1\right) = \mathbf{0}$$

$$H_0\left(x_2\right) : \boldsymbol{\lambda}\left(x_2\right) = \mathbf{0}$$

testa-se a ausência dos efeitos dos factores principais e pelas hipóteses

$$H_0\left(x_1+x_2\right):\boldsymbol{\lambda}\left(x_1+x_2\right)=\mathbf{0}$$

$$H_0\left(x_1+2x_2\right):\boldsymbol{\lambda}\left(x_1+2x_2\right)=\mathbf{0}$$

testa-se a ausência de interacção entre os dois factores, onde

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\ell\right)=\left(\mathbf{A}\left(\ell\right)\otimes\frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\boldsymbol{\mu}$$

e as matrizes $\mathbf{A}\left(\ell\right)$, *com* $\ell\in\mathcal{L}^3_{r[3]}=\{x_1,x_2,x_1+x_2,x_1+2x_2\}$ *são dadas por (4.13)-(4.16), ver exemplo 15. Com* $\boldsymbol{\mu}^\circ=[\mu^\circ_1...\mu^\circ_9]'$, $\mu^\circ_j=\mathbb{E}\left(Y_{ij}\right)$, $Y_{ij}=Y_i(\mathbf{x}_j)$, $\mathbf{x}_j\in G^2_{[3]}$, $j=1,...,9, i=1,...,r$ *as hipóteses anteriores são equivalentes, respectivamente, a*

$$H_0\left(x_1\right):\mu^\circ_1+\mu^\circ_4+\mu^\circ_7=\mu^\circ_2+\mu^\circ_5+\mu^\circ_8=\mu^\circ_3+\mu^\circ_6+\mu^\circ_9$$

$$H_0\left(x_2\right):\mu^\circ_1+\mu^\circ_2+\mu^\circ_3=\mu^\circ_4+\mu^\circ_5+\mu^\circ_6=\mu^\circ_7+\mu^\circ_8+\mu^\circ_9$$

$$H_0\left(x_1+x_2\right):\mu^\circ_1+\mu^\circ_6+\mu^\circ_8=\mu^\circ_2+\mu^\circ_4+\mu^\circ_9=\mu^\circ_3+\mu^\circ_5+\mu^\circ_7$$

$$H_0\left(x_1+2x_2\right):\mu^\circ_1+\mu^\circ_5+\mu^\circ_9=\mu^\circ_2+\mu^\circ_6+\mu^\circ_7=\mu^\circ_3+\mu^\circ_4+\mu^\circ_8.$$

4.2 Confundimento de um factorial p^N com p^s blocos

Confundimento é uma técnica que consiste em agrupar os tratamentos de uma réplica completa, em p^s blocos ($s<N$), onde o número de tratamentos por bloco é inferior ao número de tratamentos de uma réplica completa. Para construir um factorial p^N confundido com p^s blocos consideram-se s aplicações lineares reduzidas, $\ell_1,...,\ell_s\in\mathcal{L}^N_{r[p]}$, linearmente independentes e o subespaço linear

$$\mathcal{L}_1=sp\left(\ell_1,...,\ell_s\right).$$

Este subespaço tem dimensão s e é constituído por p^s aplicações lineares, das quais, p^s-1 são distintas de $\ell_{\mathbf{0}}$. Como para cada aplicação $\ell\in\mathcal{L}_1$, $c\ell\in\mathcal{L}_1$, com $c\neq 0$, a aplicação h-equivalente a ℓ também pertence a $\mathcal{L}_1$. Então $\mathcal{L}_1$ decompõe-se em classes de equivalência-h. Como cada classe de equivalência-h, distinta da classe $[\ell_{\mathbf{0}}]_h$, tem $p-1$ aplicações, então existem

$$m_1 = \frac{p^s - 1}{p - 1}$$

classes de equivalência-h em $\mathcal{L}_1$, distintas da classe $[\ell_{\mathbf{0}}]_h$ e o mesmo número de aplicações lineares reduzidas. Representa-se a família das aplicações lineares reduzidas que pertencem a $\mathcal{L}_1$ por $\mathcal{L}_{1r}$. As aplicações $\ell \in \mathcal{L}_{1r}$ podem ser ordenadas, de 1 até m_1, respeitando a ordem inicial das aplicações $\ell \in \mathcal{L}^N_{[p]}$ dada por (4.8). Considerando

$$[\mathbf{L}|\mathbf{b}] = \{\mathbf{x} : \ell_1(\mathbf{x}) = b_1, \ ... \ , \ell_s(\mathbf{x}) = b_s\}, \text{ com } \mathbf{b} = (b_1, ..., b_s) \in G^s_{[p]},$$

(ver Definição 26), agrupam-se os p^N tratamentos em p^s blocos, contendo cada bloco p^{N-s} tratamentos, ver figura 4.1. Obtém-se assim um novo factor, designado por factor Bloco, cujos níveis correspondem aos vários blocos. Os blocos podem ser ordenados de 1 até p^s pelos vectores $\mathbf{b} \in G^s_{[p]}$ usando (4.8), ou seja, Bloco 1=$[\mathbf{L}|\mathbf{b}_1]$, Bloco 2=$[\mathbf{L}|\mathbf{b}_2]$,...,Bloco p^s =$[\mathbf{L}|\mathbf{b}_{p^s}]$.

Fig. 4.1: Factorial p^N confundido com p^s blocos

	Bloco 1	Bloco 2	...	Bloco p^s
	p^{N-s} tratamentos	p^{N-s} tratamentos	...	p^{N-s} tratamentos
Totais Blocos	T_1	T_2	...	T_{p^s}

Teorema 26. *Cada aplicação de $\mathcal{L}_1$ tem valor constante em cada bloco.*

Demonstração. Seja $\ell \in \mathcal{L}_1$, arbitrária. Se $\mathbf{x} \in [\mathbf{L}|\mathbf{b}_j]$ então

$$\ell(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{s} c_k \ell_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{s} c_k b_{jk}.$$

□

Como cada aplicação $\ell \in \mathcal{L}_1$, em particular cada aplicação de $\mathcal{L}_{1r}$, tem valor constante em cada bloco, diz-se que estas aplicações estão confundidas com os blocos. Consequentemente, os efeitos factoriais associados a estas aplicações estão confundidos com os blocos. As aplicações utilizadas para construir os blocos devem ser escolhidas de forma a que os efeitos principais e as interações de baixa ordem não sejam confundidos com os blocos. As restantes aplicações de $\mathcal{L}_{[p]}^{N} - \mathcal{L}_1$, em particular as aplicações reduzidas que não pertençam a $\mathcal{L}_1$, tomam em cada bloco p^{N-s-1} vezes cada um dos seus valores.

Exemplo 17. *Sejam $p = N = 3$ e $G_{[3]} = \{0, 1, 2\}$. Sejam, por exemplo, as aplicações $x_1 + 2x_2$ e $x_1 + x_2 + 2x_3$ $(s = 2)$, linearmente independentes e o subespaço linear $\mathcal{L}_1 = sp\,(x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + 2x_3)$ constituído pelas aplicações*

$\ell \in \mathcal{L}_{1r}$	$\ell \in (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_{1r})$
$x_1 + 2x_2$	$2x_1 + x_2$
$x_1 + x_3$	$2x_1 + 2x_3$
$x_2 + x_3$	$2x_2 + 2x_3$
$x_1 + x_2 + 2x_3$	$2x_1 + 2x_2 + x_3$

Tab. 4.10: Aplicações de $\mathcal{L}_1 = sp\,(x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + 2x_3)$

Além das interacções associadas às aplicações $x_1 + 2x_2$ e $x_1 + x_2 + 2x_3$, são também confundidos com os blocos as interacções associadas às aplicações de ordem

1, x_1+x_3 e x_2+x_3. Para construir os blocos resolve-se o sistema (4.10), ver exemplo 12, agrupando-e os $3^3 = 27$ tratamentos em $3^2 = 9$ blocos. Cada bloco contém 3 tratamentos (ver figura 4.11).

Tab. 4.11: Confundimento de um factorial 3^3 com 3^2 blocos

(b_1, b_2)	Blocos	Tratamentos
$(0,0)$	Bloco 1	(0,0,0) (1,1,2) (2,2,1)
$(1,0)$	Bloco 2	(0,2,2) (1,0,1) (2,1,0)
$(2,0)$	Bloco 3	(0,1,1) (1,2,0) (2,0,2)
$(0,1)$	Bloco 4	(0,0,2) (1,1,1) (2,2,0)
$(1,1)$	Bloco 5	(0,2,1) (1,0,0) (2,1,2)
$(2,1)$	Bloco 6	(0,1,0) (1,2,2) (2,0,1)
$(0,2)$	Bloco 7	(0,0,1) (1,1,0) (2,2,2)
$(1,2)$	Bloco 8	(0,2,0) (1,0,2) (2,1,1)
$(2,2)$	Bloco 9	(0,1,2) (1,2,1) (2,0,0)

Até ao final desta secção considera-se que

$$\begin{cases} \ell_1, ..., \ell_{m_1} \in \mathcal{L}_{1r}, \\ \ell_{m_1+1}, ..., \ell_m \in \left(\mathcal{L}^N_{r[p]} - \mathcal{L}_{1r}\right). \end{cases}$$

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right) = \left[\mathbf{A}(\ell_1)...\mathbf{A}(\ell_{m_1})\right] \tag{4.22}$$

e

$$\mathbf{Q}\left(\mathcal{L}_1\right) = \mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right)\mathbf{A}'\left(\mathcal{L}_1\right) = \sum_{h=1}^{m_1} \mathbf{A}(\ell_h)\mathbf{A}'(\ell_h) = \sum_{h=1}^{m_1} \mathbf{Q}(\ell_h). \tag{4.23}$$

Como $\mathbf{Q}\left(\mathcal{L}_1\right)$ é uma matriz simétrica e idempotente (é uma MPO), a família

$$\left\{\frac{1}{p^N}\mathbf{J}_{p^N}, \mathbf{Q}\left(\mathcal{L}_1\right), \mathbf{Q}(\ell_{m_1+1}), ..., \mathbf{Q}(\ell_m)\right\}$$

é a base principal de uma sub-AJC principal e regular de $\mathcal{A}(p^N)$, ver secção 3.3. Representa-se esta AJC por $\mathcal{A}^\circ(p^N)$ ou por $\mathcal{A}^\circ(p^N/\mathcal{L}_1)$ caso seja necessário indicar o subespaço linear $\mathcal{L}_1$. O modelo linear estritamente associado à AJC $\mathcal{A}^\circ(p^N) \star \mathcal{A}(r)$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{rp^N}}\mathbf{1}_{rp^N}\mu + \left(\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\boldsymbol{\beta}\left(\mathcal{L}_1\right) + \sum_{h=m_1+1}^{m}\left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\boldsymbol{\beta}(\ell_h) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

onde μ representa a média global, $\boldsymbol{\beta}\left(\mathcal{L}_1\right)$, $\boldsymbol{\beta}(\ell_{m_1+1}), ..., \boldsymbol{\beta}(\ell_m)$, são vectores de parâmetros. O vector $\boldsymbol{\beta}\left(\mathcal{L}_1\right)$ está associado ao efeito Bloco, $\boldsymbol{\beta}(\ell_h)$ está associado a um efeito principal, se $O(l_h) = 0$ e associado a uma interacção factorial entre os factores que figurem em ℓ_h com coeficientes não nulos, se $O(l_h) > 0$. Na forma canónica o modelo é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = {} & \frac{1}{\sqrt{rp^N}}\mathbf{1}_{rp^N}W_0 + \left(\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\mathbf{W}\left(\mathcal{L}_1\right) + \sum_{h=m_1+1}^{m}\left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\mathbf{W}(\ell_h) \\ & + \mathbf{A}_{m+1}\mathbf{W}_{m+1}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde

$$\begin{cases} W_0 = \frac{1}{\sqrt{rp^N}}\mathbf{1}'_{rp^N}\mathbf{Y} \\ \mathbf{W}\left(\mathcal{L}_1\right) = \left(\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\mathbf{Y} \\ \mathbf{W}(\ell_h) = \left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\mathbf{Y}, \qquad h = m_1+1, ..., m \\ \mathbf{W}_{m+1} = \left(\mathbf{A}_{m+1}\right)'\mathbf{Y} \end{cases} \tag{4.25}$$

com $\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right)$ dada por (4.22) e $\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{I}_{p^N} \otimes \mathbf{K}_r$. Sejam

$$\begin{cases} S\left(\mathcal{L}_1\right) = \left\|\mathbf{A}'\left(\mathcal{L}_1\right)\mathbf{Y}\right\|^2 \\ S(\ell_h) = \left\|\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{Y}\right\|^2, \qquad h = m_1+1, ..., m \end{cases} \tag{4.26}$$

Verifica-se que

$$S(\mathcal{L}_1) = \left\|\mathbf{A}'\left(\mathcal{L}_1\right)\mathbf{Y}\right\|^2 = \sum_{h=1}^{m_1}\left\|\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{Y}\right\|^2 = \sum_{h=1}^{m_1} S(\ell_h). \tag{4.27}$$

Como

$$\sum_{h=1}^{m} S(\ell_h) = \sum_{h=1}^{m_1} S(\ell_h) + \sum_{h=m_1+1}^{m} S(\ell_h)$$

verifica-se também que

$$\sum_{h=1}^{m} S(\ell_h) = S\left(\mathcal{L}_1\right) + \sum_{h=m_1+1}^{m} S(\ell_h) = \left\|\mathbf{Y}\right\|^2 - \frac{T^2}{p^N}. \tag{4.28}$$

Sejam T_j o total das observações no Bloco$_j$ e $\mathbf{T}_B = \left[T_1 ... T_{p^s}\right]$. Verifica-se que

$$S\left(\mathcal{L}_1\right) = \frac{1}{p^{N-s}}\left\|\mathbf{T}_B\right\|^2 - \frac{T^2}{p^N}.$$

Para verificar esta igualdade são necessárias algumas definições e propriedades (semelhantes às da secção anterior) que são apresentadas de seguida.

Para cada aplicação $\ell_h \in \mathcal{L}_{1r}, h = 1, ..., m_1$ define-se uma matriz $\mathbf{D}(\ell_h)$, do tipo $p \times p^s$, com elementos dados por

$$d_{i,j}(\ell_h) = \begin{cases} 1, & \ell_h(\mathbf{x}) = i-1 \\ 0, & \ell_h(\mathbf{x}) \neq i-1 \end{cases} \tag{4.29}$$

com $i = 1, ..., p,\ e\ \mathbf{x} \in Bloco_j,\ j = 1, ..., p^s$. Em cada linha da matriz $\mathbf{D}(\ell_h)$ os elementos que correspondem aos blocos em que ℓ_h toma o valor $i - 1$ são iguais a 1 e os restantes elementos são iguais a zero.

Teorema 27. *Sejam as aplicações* $\ell_h, \ell_{h'} \in \mathcal{L}_{1r}$ *com* $h, h' = 1, ..., m_1,\ h \neq h'$ *e as respectivas matrizes* $\mathbf{D}(\ell_h), \mathbf{D}(\ell_{h'})$ *dadas por* (4.29). *Então*

a) $\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{D}'(\ell_h) = p^{s-1}\mathbf{I}_p$,

b) $\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{D}'(\ell_{h'}) = p^{s-2}\mathbf{J}_p$.

Demonstração. Sejam $\ell_h, \ell_{h'} \in \mathcal{L}_{1r},\ h \neq h'$ e $\mathbf{D}(\ell_h), \mathbf{D}(\ell_{h'})$ as respectivas matrizes dadas por (4.29).

a) Como $\#[\ell_h | i - 1] = p^{s-1},\ i = 1, ..., p,$ significa que em cada linha da matriz $\mathbf{D}(\ell_h)$ há p^{s-1} elementos iguais a 1 (correspondentes aos blocos onde ℓ_h toma o valor $i - 1$) e os restante são nulos, pelo que,

$$\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{1}_{p^s} = p^{s-1}\mathbf{1}_p.$$

Como também se tem $\mathbf{1}'_p\mathbf{D}(\ell_h) = \mathbf{1}'_{p^s}$, os elementos principais da matriz $\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{D}'(\ell_h)$ são iguais a p^{s-1} e os elementos fora da diagonal principal são nulos, pelo que, $\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{D}'(\ell_h) = p^{s-1}\mathbf{I}_p$.

b) Como $\#[\ell_h, \ell_{h'} | i - 1,\ i - 1] = p^{s-2}, i = 1, ..., p$, tem-se que $\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{D}'(\ell_{h'}) = p^{s-2}\mathbf{J}_p$.

□

Seja $\mathbf{K}_p$ uma matriz, do tipo $p \times (p - 1)$, que se obtém de uma matriz ortogonal estandardizada de ordem p, eliminando a primeira coluna igual a $\frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{1}_p$ (ver Anexo A.4). Para cada aplicação linear reduzida $\ell_h \in \mathcal{L}_{1r}$, com $h = 1, ..., m_1$, define-se a matriz, do tipo $p^s \times (p - 1)$, dada por

$$\mathbf{B}(\ell_h) = \frac{1}{\sqrt{p^{s-1}}}\ \mathbf{D}'(\ell_h)\ \mathbf{K}_p,\ \ h = 1, ..., m_1 \tag{4.30}$$

onde $\mathbf{D}(\ell_h)$ é dada por (4.29).

Teorema 28. *Sejam $\ell_h, \ell_{h'} \in \mathcal{L}_{1r}$, com $h, h' = 1, ..., m_1$ onde $h \neq h'$ e as respectivas matrizes $\mathbf{B}(\ell_h), \mathbf{B}(\ell_{h'})$ dadas por (4.30). Então*

a) $\mathbf{B}'(\ell_h)\mathbf{1}_{p^s} = \mathbf{0}_{(p-1)\times 1}$,

b) $\mathbf{B}'(\ell_h)\mathbf{B}(\ell_h) = \mathbf{I}_{p-1}$,

c) $\mathbf{B}'(\ell_h)\mathbf{B}(\ell_{h'}) = \mathbf{0}_{(p-1)\times(p-1)}$.

Demonstração. Sejam $\ell_h, \ell_{h'} \in \mathcal{L}_{1r}$, com $h, h' = 1, ..., m_1$ e $h \neq h'$. Esta demonstração é semelhante à do Teorema 24. Tendo em conta (4.29), as propriedades da matriz $\mathbf{K}_p$ (ver Anexo A.4) e o Teorema 27, verifica-se

a) $\mathbf{B}'(\ell_h)\mathbf{1}_{p^s} = \frac{1}{\sqrt{p^{s-1}}}\mathbf{K}_p'\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{1}_{p^s} = \sqrt{p^{s-1}}(\mathbf{1}_p'\mathbf{K}_p)' = \mathbf{0}_{(p-1)\times 1}$,

b) $\mathbf{B}'(\ell_h)\mathbf{B}(\ell_h) = \frac{1}{p^{s-1}}\mathbf{K}_p'\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{D}'(\ell_h)\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p'\mathbf{I}_p\mathbf{K}_p = \mathbf{I}_{p-1}$,

c) $\mathbf{B}'(\ell_h)\mathbf{B}(\ell_{h'}) = \frac{1}{p^{s-1}}\mathbf{K}_p'\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{D}'(\ell_{h'})\mathbf{K}_p = \frac{p^{s-2}}{p^{s-1}}\mathbf{K}_p'\mathbf{J}_p\mathbf{K}_p = \frac{1}{p}\mathbf{K}_p'\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'\mathbf{K}_p = \mathbf{0}_{(p-1)\times(p-1)}$.

□

Corolário 6. *Sejam as matrizes $\mathbf{B}(\ell_h), h = 1, ..., m_1$ dadas por (4.30). Verifica-se que a matriz*

$$\mathbf{P}(Bl) = \left[\frac{1}{\sqrt{p^s}}\mathbf{1}_{p^s}\ \mathbf{B}(\ell_1)\ \cdots\ \mathbf{B}(\ell_{m_1})\right]$$

é ortogonal, que

$$\left\{\frac{1}{p^s}\mathbf{J}_{p^s}, \mathbf{B}(\ell_1)\mathbf{B}'(\ell_1), ..., \mathbf{B}(\ell_{m_1})\mathbf{B}'(\ell_{m_1})\right\}$$

é uma $FMPOMO$ e consequentemente,

$$\mathbf{Q}\left(\mathcal{L}_1\right) = \sum_{h=1}^{m_1}\mathbf{B}(\ell_h)\mathbf{B}'(\ell_h)$$

também é uma matriz de projecção ortogonal.

Demonstração. Como $\mathbf{1}'_{p^s}\mathbf{1}_{p^s} = p^s$ e atendendo ao Teorema 28 verifica-se o que se pretende. □

Para cada aplicação linear reduzida $\ell_h \in \mathcal{L}_{1r}, h = 1, ..., m_1$, atendendo a (4.11) e a (4.29), verifica-se a relação

$$\mathbf{D}(\ell_h)\mathbf{T}_B = \mathbf{C}(\ell_h)\mathbf{Y},\ h = 1, ..., m_1. \tag{4.31}$$

Tendo em conta (4.12), (4.30)-(4.31) é possível estabelecer também uma relação entre as matrizes $\mathbf{B}(\ell_h)$ *e* $\mathbf{A}(\ell_h), \ell_h \in \mathcal{L}_{1r},\ h = 1, ..., m_1$ dada por

$$\mathbf{B}'(\ell_h)\mathbf{T}_B = \sqrt{p^{N-s}}\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{Y},\ h = 1, ..., m_1. \tag{4.32}$$

Como $\sum_{h=1}^{m_1}\mathbf{B}(\ell_h)\mathbf{B}'(\ell_h) = \mathbf{I}_{p^s} - \frac{1}{p^s}\mathbf{J}_{p^s}$ verifica-se, como se pretendia,

$$S(\mathcal{L}_1) = \sum_{i=1}^{m_1} S(\ell_h) = \sum_{i=1}^{m_1} \|\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{Y}\|^2 = \frac{1}{p^{N-s}}\|\mathbf{T}_B\|^2 - \frac{T^2}{p^N}. \tag{4.33}$$

Quando $r > 1$ as somas (4.26) são dadas por

$$\begin{cases} S(\mathcal{L}_1) = \left\| \left(\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \mathbf{Y} \right\|^2 \\ S(\ell_h) = \left\| \left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \mathbf{Y} \right\|^2, \quad h = m_1 + 1, ..., m \end{cases}$$

e (4.28) dada por

$$\sum_{h=1}^{m} S(\ell_h) = S\left(\mathcal{L}_1\right) + \sum_{h=m_1+1}^{m} S(\ell_h) + S = \|\mathbf{Y}\|^2 - \frac{T^2}{rp^N}$$

onde

$$S = \|\mathbf{A}'_{m+1}\mathbf{Y}\|^2$$

e $\mathbf{A}_{m+1} = \mathbf{I}_{p^N} \otimes \mathbf{K}_r$.

Sejam os vectores $\mathbf{W}(\mathcal{L}_1)$, $\mathbf{W}(\ell_h)$ com $h = m_1+1,...,m$ e $\mathbf{W}_{m+1}$, dados por (4.25). Assumindo $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{rp^N}\right)$ e tendo em conta as secções 3.1 e 3.2, tem-se que

$$\begin{cases} \mathbf{W}(\mathcal{L}_1) \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}(\mathcal{L}_1), \sigma^2 \mathbf{I}_{p^s-1}\right) \\ \mathbf{W}(\ell_h) \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}(\ell_h), \sigma^2 \mathbf{I}_{p-1}\right), \quad h = m_1+1,...,m \\ S \sim \sigma^2 \chi^2_{p^N(r-1)} \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{L}_1) = \left(\mathbf{A}(\mathcal{L}_1) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda}(\ell_h) = \left(\mathbf{A}(\ell_h) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}} \mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu}, \quad h = m_1+1,...,m \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \mathbf{W}(\mathcal{L}_1) \text{ é } UMVUE \text{ para } \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{L}_1) \\ \mathbf{W}(\ell_h) \text{ é } UMVUE \text{ para } \boldsymbol{\lambda}(\ell_h), \quad h = m_1+1,...,m \\ \frac{S}{p^N(r-1)} \text{ é } UMVUE \text{ para } \sigma^2 \end{cases}$$

Considerando a hipótese

$$H_0(\mathcal{L}_1) : \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{L}_1) = \mathbf{0}$$

testa-se a ausência do efeito do factor Bloco. Considerando as hipóteses

$$H_0(\ell_h) : \boldsymbol{\lambda}(\ell_h) = \mathbf{0}, \ h = m_1+1,...,m$$

testam-se as ausências dos efeitos principais (se $O(\ell) = 0$) e das interacções factoriais (se $O(\ell) > 0$), que não estão confundidos com os blocos.

Quando as hipóteses $H_0(\mathcal{L}_1)$ e $H_0(\ell_h), h = m_1+1,...,m$ se verificam, tem-se que

$$\begin{cases} S_0(\mathcal{L}_1) = \|\mathbf{W}(\mathcal{L}_1)\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{p^s-1} \\ S_0(l_h) = \|\mathbf{W}(l_h)\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{p-1}, \quad h = m_1+1,...,m \end{cases}$$

pelo que,

$$\begin{cases} F_0(\mathcal{L}_1) = \frac{p^N(r-1)}{p^s(r-1)} \frac{S_0(\mathcal{L}_1)}{S} \sim \mathcal{F}_{p^s(r-1);p^N(r-1)} \\ F_0(\ell_h) = \frac{p^N(r-1)}{p-1} \frac{S_0(\ell_h)}{S} \sim \mathcal{F}_{p-1;p^N(r-1)}, \quad h = m_1+1,...,m \end{cases}$$

Para um nível de significância α deve rejeitar-se a hipótese $H_0(\mathcal{L}_1)$ se

$$F_0(\mathcal{L}_1) > f_{(p^s(r-1),p^N(r-1),1-\alpha)}$$

e deve rejeitar-se a hipótese $H_0(\ell_h)$, $h = m_1+1, ..., m$ se

$$F_0(\ell_h) > f_{(p-1,p^N(r-1),1-\alpha)}.$$

Exemplo 18. *Para ilustrar a exposição desta secção retoma-se o exemplo 17 onde se considerou* $p = N = 3$, $s = 2$ *e* $\mathcal{L}_1 = sp(x_1+2x_2, x_1+x_2+2x_3)$. *Recordando, os efeitos associados às aplicações da família*

$$\mathcal{L}_{1r} = \{x_1+2x_2,\ x_1+x_3,\ x_2+x_3,\ x_1+x_2+2x_3\}$$

estão confundidos com os blocos. Os efeitos associados às aplicações da família

$$\mathcal{L}^3_{r[3]} - \mathcal{L}_{1r} = \{x_1, x_2, x_1+x_2, x_3, x_1+x_2+x_3, x_1+2x_2+x_3, x_1+2x_3, x_2+2x_3, x_1+2x_2+2x_3\}$$

não estão confundidos com os blocos (ver Anexo E). Num factorial 3^3 *confundido com* 3^2 *blocos considerando a hipótese*

$$H_0(\mathcal{L}_1) : \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{L}_1) = \mathbf{0}$$

onde

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathcal{L}_1) = \left(\mathbf{A}(\mathcal{L}_1) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathcal{L}_1) = [\ \mathbf{A}(x_1+2x_2)\ \ \mathbf{A}(x_1+x_3)\ \ \mathbf{A}(x_2+x_3)\ \ \mathbf{A}(x_1+x_2+2x_3)\ ]$$

ver (4.22), testa-se a ausência do efeito do factor Bloco. Através das hipóteses

$$H_0(\ell) : \boldsymbol{\lambda}(\ell) = \mathbf{0}$$

com $\boldsymbol{\lambda}(\ell) = \left(\mathbf{A}(\ell) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu}$ *e* $\ell \in \mathcal{L}^3_{r[3]} - \mathcal{L}_{1r}$, *testa-se a ausência dos efeitos principais associados às aplicações* x_1, x_2 *e* x_3, *a ausência de interacção de ordem 1 associada às aplicações* x_1+x_2, x_1+2x_3, x_2+2x_3 *e a ausência de interações de ordem 2 associadas às aplicações* $x_1+x_2+x_3$, $x_1+2x_2+x_3$ *e* $x_1+2x_2+2x_3$.

4.3 Réplica fraccionária $\frac{1}{p^s} \times p^N$

Uma das vantagens dos factoriais é poder utilizar apenas os tratamentos de um dos blocos, isto é, utilizar apenas uma fracção, $\frac{1}{p^s} \times p^N$, do número total de tratamentos. Sejam as aplicações $\ell_1, ..., \ell_s \in \mathcal{L}_{r[p]}^N$ linearmente independentes e o subespaço linear $\mathcal{L}_1 = sp(\ell_1, ..., \ell_s)$. Para construir os p^s blocos considera-se o procedimento exposto na secção anterior e considera-se agora apenas um desses blocos. Representa-se o bloco escolhido por

$$[\mathbf{L}|\mathbf{b}]^*$$

e por

$$\mathbf{x}_1^*, ..., \mathbf{x}_{p^{N-s}}^*$$

os vectores que pertencem a esse bloco. Para estudar estes modelos é necessário definir outra relação (de equivalência) em $\mathcal{L}_{[p]}^N$.

Definição 28. *(Relação ρ) Sejam $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_{[p]}^N$. Diz-se que $\ell_1 \rho \ell_2$ se e só se*

$$\exists c \in G_{[p]} \backslash \{0\} \text{ e } \ell^\circ \in \mathcal{L}_1, \text{ tais que, } \ell_2 = c\ell_1 + \ell^\circ. \tag{4.34}$$

Teorema 29. *A relação ρ é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_{[p]}^N$.*

Demonstração. Sejam $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathcal{L}_{[p]}^N$, arbitrárias. Como $\ell_1 = 1\ell_1 + \ell_{\mathbf{0}}$, tem-se que $\ell_1 \rho \ell_1$. Admita-se que $\ell_1 \rho \ell_2$, ou seja, $\ell_2 = c\ell_1 + \ell^\circ$, com $c \in G_{[p]} \backslash \{0\}$ e $\ell^o \in \mathcal{L}_1$. Como $\ell_1 = c^{-1}\ell_2 + (-c)^{-1}\ell^\circ$ tem-se que $\ell_2 \rho \ell_1$. Finalmente considere-se que $\ell_1 \rho \ell_2$ e $\ell_2 \rho \ell_3$, ou seja, $\ell_2 = c_1\ell_1 + \ell_1^\circ$ e $\ell_3 = c_2\ell_2 + \ell_2^\circ$, com $c_1, c_2 \in G_{[p]} \backslash \{0\}$ e $\ell_1^\circ, \ell_2^\circ \in \mathcal{L}_1$. Dado que

$$\ell_3 = c_2(c_1\ell_1 + \ell_1^o) + \ell_2^o = c_2c_1\ell_1 + (c_2\ell_1^o + \ell_2^o)$$

com $c_2c_1 \neq 0$ e $c_2\ell_1^o + \ell_2^o \in \mathcal{L}_1$, então, $\ell_1 \rho \ell_3$. Como a relação ρ é reflexiva, simétrica e transitiva é uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_{[p]}^N$. $\square$

Teorema 30. *Seja* $\ell_1 \in \mathcal{L}_1$*. Tem-se que* $\ell_1 \rho \ell_2$ *se e só se* $\ell_2 \in \mathcal{L}_1$*.*

Demonstração. Seja $\ell_1 \in \mathcal{L}_1$, arbitrária. Supor que $\ell_1 \rho \ell_2$. Então existem $c \neq 0$ e $\ell^\circ \in \mathcal{L}_1$, tais que, $\ell_2 = c\ell_1 + \ell^\circ$. Como $\mathcal{L}_1$ é um subespaço linear é fechado para a soma e multiplicação por um escalar, portanto $\ell_2 = c\ell_1 + \ell^\circ \in \mathcal{L}_1$. Por outro lado, seja $\ell_2 \in \mathcal{L}_1$. Como $\ell_2 = 1\ell_1 + (\ell_2 - \ell_1)$ e $\ell_2 - \ell_1 \in \mathcal{L}_1$, $\ell_1 \rho \ell_2$. □

Assim quando $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_1$, verifica-se que $\ell_1 \rho \ell_2$, ou seja,

Teorema 31. *O subespaço linear* $\mathcal{L}_1$ *é uma classe de equivalência*$-\rho$*.*

Prova-se também que as classes de equivalência-ρ decompõem-se em classes de equivalência-h.

Teorema 32. *Sejam* $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_{[p]}^N$*. Se* $\ell_1 h \ell_2$ *então* $\ell_1 \rho \ell_2$*.*

Demonstração. Sejam $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_{[p]}^N$, tais que, $\ell_1 h \ell_2$, ou seja, $\ell_2 = c\ell_1$, com $c \neq 0$. Mas $\ell_2 = c\ell_1 = c\ell_1 + \ell_{\mathbf{0}}$, com $c \neq 0$ e $\ell_{\mathbf{0}} \in \mathcal{L}_1$, portanto $\ell_1 \rho \ell_2$. □

Seja $\{\ell_1, ..., \ell_s, \ell_{s+1}, ..., \ell_N\}$ uma base do espaço linear $\mathcal{L}_{[p]}^N$ e $\mathcal{L}_{[p]}^N = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_1^*$ onde $\mathcal{L}_1^* = sp\left(\ell_{s+1}, ..., \ell_N\right)$. Em $\mathcal{L}_1^*$ há p^{N-s} aplicações lineares, das quais, $p^{N-s} - 1$ são distintas de $\ell_{\mathbf{0}}$. À semelhança do que acontece com $\mathcal{L}_1$ o subespaço $\mathcal{L}_1^*$ decompõe-se em classes de equivalência-h. Em $\mathcal{L}_1^*$ há

$$m_1^* = \frac{p^{N-s} - 1}{p - 1}$$

classes de equivalência-h, distintas da classe que contém a aplicação nula e o mesmo número das aplicações reduzidas. Representa-se a família de aplicações lineares reduzidas que pertencem a $\mathcal{L}_1^*$ por $\mathcal{L}_{1r}^*$. As aplicações $\ell \in \mathcal{L}_{1r}^*$, podem ser ordenadas de 1 até m_1^*, respeitando a ordem inicial das aplicações $\ell \in \mathcal{L}_{[p]}^N$ dada por (4.8). Tendo em conta a decomposição

$$\ell_1 = \ell_{11} + \ell_{12} \text{ e } \ell_2 = \ell_{21} + \ell_{22}$$

com $\ell_{11}, \ell_{21} \in \mathcal{L}_1$ e $\ell_{12}, \ell_{22} \in \mathcal{L}_1^\star$ enuncia-se o Teorema seguinte.

Teorema 33. *Sejam $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_{[p]}^N$. Verifica-se que $\ell_1 \rho \ell_2$ se e só se $\ell_{12} h \ell_{22}$.*

Demonstração. Sejam $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_{[p]}^N$, arbitrárias. Admitindo que $\ell_1 \rho \ell_2$, significa que existem $c \neq 0$ e $\ell^o \in \mathcal{L}_1$, tais que, $\ell_2 = c\ell_1 + \ell^o$. Mas $\ell_2 = c(\ell_{11} + \ell_{12}) + \ell^o = (c\ell_{11} + \ell^o) + c\ell_{12}$ com $c\ell_{11} + \ell^o \in \mathcal{L}_1$ e $c\ell_{12} \in \mathcal{L}_1^*$, pois $\mathcal{L}_{[p]}^N = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_1^*$ logo $\ell_{22} = c\ell_{12}$, pelo que, $\ell_{12} h \ell_{22}$. Reciprocamente, se $\ell_{12} h \ell_{22}$ então existe $c \neq 0$, tal que, $\ell_{22} = c\ell_{12}$. Então, $\ell_2 = \ell_{21} + \ell_{22} = \ell_{21} + c\ell_{12}$. Como $\ell_{12} = \ell_1 - \ell_{11}$ vem $\ell_2 = c\ell_{12} + (\ell_{21} - c\ell_{11})$, com $\ell_{21} - c\ell_{11} \in \mathcal{L}_1$ e $c \neq 0$, pelo que $\ell_1 \rho \ell_2$. □

Teorema 34. *Em $\mathcal{L}_{[p]}^N$ existem $m_1^* = \frac{p^{N-s}-1}{p-1}$ classes de equivalência-ρ distintas de $\mathcal{L}_1$. Cada classe de equivalência-ρ, distinta de $\mathcal{L}_1$, contém $p^s(p-1)$ aplicações.*

Demonstração. Supor com vista a um absurdo que existem aplicações $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_{1r}^*$, $\ell_1 \neq \ell_2$, tais que, $\ell_1 \rho \ell_2$. Como $\ell_1 = \ell_{\mathbf{0}} + \ell_1$, $\ell_2 = \ell_{\mathbf{0}} + \ell_2$ e $\mathcal{L}_{[p]}^N = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_1^*$ pelo Teorema 33 conclui-se que $\ell_1 h \ell_2$, o que é absurdo pois em cada classe de equivalência-h há apenas uma aplicação reduzida. Pode-se concluir assim que em cada classe de equivalência-ρ, distinta de $\mathcal{L}_1$, há apenas uma aplicação de $\mathcal{L}_{1r}^*$. Portanto em $\mathcal{L}_{[p]}^N$ existem m_1^* classes de equivalência-ρ. Em $\mathcal{L}_{[p]}^N - \mathcal{L}_1$ há $p^N - p^s$ aplicações, então cada classe de equivalência-ρ, distinta de $\mathcal{L}_1$, contém

$$\frac{p^N - p^s}{\frac{p^{N-s}-1}{p-1}} = \frac{p^s\left(p^{N-s}-1\right)(p-1)}{p^{N-s}-1} = p^s(p-1)$$

aplicações. □

As aplicações $\ell_1, ..., \ell_s \in \mathcal{L}_{r[p]}^N$ utilizadas para obter o bloco $[\mathbf{L}|\mathbf{b}]^*$ devem ser escolhidas de forma a que as aplicações associadas aos efeitos principais e às interacções factoriais de baixa ordem (tanto quanto possível) não pertençam à mesma classe de equivalência-ρ, distinta da classe $\mathcal{L}_1$. Em cada classe de equivalência-ρ, distinta da classe $\mathcal{L}_1$, escolhe-se a aplicação reduzida de menor ordem para representar a classe de equivalência-ρ. Veja-se o exemplo seguinte.

Exemplo 19. *Sejam* $N = p = 3$. *Em* $\mathcal{L}^3_{[3]}$ *há* $p^N = 3^3 = 27$ *aplicações lineares, das quais,* $m = (3^3 - 1)/(3 - 1) = 13$ *são aplicações reduzidas. Na tabela seguinte apresentam-se as aplicações reduzidas, ordenadas de acordo com (4.8) e as classes de equivalência-h de* $\mathcal{L}^3_{[3]}$ *(ver Anexo E).*

aplicações reduzidas	classes de equivalência-h
	$\{l_{\mathbf{0}}\}$
x_1	$\{x_1, 2x_1\}$
x_2	$\{x_2, 2x_2\}$
$x_1 + x_2$	$\{x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2\}$
$x_1 + 2x_2$	$\{x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2\}$
x_3	$\{x_3, 2x_3\}$
$x_1 + x_3$	$\{x_1 + x_3, 2x_1 + 2x_3\}$
$x_2 + x_3$	$\{x_2 + x_3, 2x_2 + 2x_3\}$
$x_1 + x_2 + x_3$	$\{x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3\}$
$x_1 + 2x_2 + x_3$	$\{x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3\}$
$x_1 + 2x_3$	$\{x_1 + 2x_3, 2x_1 + x_3\}$
$x_2 + 2x_3$	$\{x_2 + 2x_3, 2x_2 + x_3\}$
$x_1 + x_2 + 2x_3$	$\{x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3\}$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3$	$\{x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3\}$

Tab. 4.12: Aplicações de $\mathcal{L}^3_{r[3]}$ e classes de equivalência-h em $\mathcal{L}^3_{[3]}$

Seja, por exemplo, o subespaço linear de $\mathcal{L}^3_{[3]}$,

$$\mathcal{L}_1 = sp\,(x_1 + x_2 + x_3) = \{l_{\mathbf{0}}, x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3\}.$$

Este subespaço corresponde a uma das classes de equivalência-ρ *(Teorema 31). Sejam, por exemplo, as aplicações* x_2 *e* x_3*, tais que,* $\{x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3\}$ *é uma base para* $\mathcal{L}^3_{[3]}$. *Então* $\mathcal{L}^*_1 = sp\,(x_2, x_3)$ *e* $\mathcal{L}^*_{1r} = \{x_2, x_3, x_2 + x_3, x_2 + 2x_3\}$. *Pelo Teorema 34 existem* $m^*_1 = (3^{3-1} - 1)\,/(3 - 1) = 4$ *classes de equivalência-*ρ*, distintas de* $\mathcal{L}_1$ *e cada uma destas classes contém* $3(3 - 1) = 6$ *aplicações. Atendendo à definição 28 e ao Teorema 32, as classes de equivalência−*ρ*, distintas de* $\mathcal{L}_1$*, são*

$$\{\underline{x_1}, 2x_1, x_2 + x_3, 2x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3\}$$
$$\{\underline{x_2}, 2x_2, x_1 + x_3, 2x_1 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3\}$$
$$\{\underline{x_3}, 2x_3, x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3\}$$
$$\{\underline{x_1 + 2x_2}, 2x_1 + x_2, x_1 + 2x_3, 2x_1 + x_3, x_2 + 2x_3, 2x_2 + x_3\}.$$

Como as aplicações associadas aos efeitos principais, x_1, x_2 *e* x_3*, pertencem a classes distintas podem ser escolhidas como representantes da classe-*ρ *a que pertencem. Na última classe indicada escolhe-se uma das aplicações associada a uma interacção factorial, por exemplo,* $x_1 + 2x_2$*, como representante da classe.*

Pelo Teorema 34 o espaço linear $\mathcal{L}^N_{[p]}$ decompõe-se em $m^*_1 + 1$ classes de equivalência-ρ, onde $m^*_1 = \frac{p^{N-s}}{p-1}$. Existem m^*_1 classes de equivalência-ρ distintas de $\mathcal{L}_1$, portanto existem m^*_1 aplicações representantes. Representam-se as aplicações representantes das m^*_1 classes de equivalência-ρ, distintas da classe $\mathcal{L}_1$, por

$$\ell^*_1, ..., \ell^*_{m^*_1}.$$

Para cada aplicação representante considera-se a matriz $\mathbf{C}^*(\ell^*)$ [3], do tipo $p \times p^{N-s}$, constituída pelas colunas associadas aos vectores $\mathbf{x}^*_1, ..., \mathbf{x}^*_{p^{N-s}}$ pertencentes ao bloco seleccionado.

Estas matrizes verificam as propriedades que se enunciam de seguida.

[3] Sub-matriz da matriz $\mathbf{C}(\ell)$, dada por (4.11), com $\ell = \ell^*$.

Teorema 35. *Sejam as aplicações ℓ_h^*, $\ell_{h'}^*$, com $h \neq h'$ e $h, h' = 1, ..., m_1^*$ linearmente independentes entre si e das aplicações $\ell_1, ..., \ell_s$. Verifica-se que*

a) $\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\,(\mathbf{C}^*(\ell_h^*))' = p^{N-s-1}\mathbf{I}_p$

b) $\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\,(\mathbf{C}^*(\ell_{h'}^*))' = p^{N-s-2}\mathbf{J}_p$.

Demonstração. a) Como $\#\,[l_h^*|i-1] = p^{N-s-1}, i = 1, ..., p$ significa que em cada linha da matriz $\mathbf{C}^*(\ell_h^*)$ existem p^{N-s-1} elementos iguais a 1 e os restantes são nulos, pelo que,

$$\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\mathbf{1}_{p^{N-s}} = p^{N-s-1}\mathbf{1}_p.$$

Como $\mathbf{1}_p'\mathbf{C}^*(\ell_h^*) = \mathbf{1}_{p^{N-s}}'$ os elementos principais da matriz $\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\,(\mathbf{C}^*(\ell_h^*))'$ são iguais a p^{N-s-1} e os restantes são iguais a 0, logo $\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\,(\mathbf{C}^*(\ell_h^*))' = p^{N-s-1}\mathbf{I}_p$.

b) Dado que $\#\,[l_h^*, l_{h'}^*|i-1, i-1] = p^{N-s-2}, i = 1, ..., p$ tem-se que cada elemento da matriz $\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\,(\mathbf{C}^*(\ell_{h'}^*))'$ é igual a p^{N-s-2}, pelo que, $\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\,(\mathbf{C}^*(\ell_{h'}^*))' = p^{N-s-2}\mathbf{J}_p$.

□

Exemplo 20. *Retome-se o exemplo 19 onde se considerou $p = N = 3$, $\mathcal{L}_1 = sp\,(x_1 + x_2 + x_3)$ e x_1, x_2, x_3 e $x_1 + 2x_2$ as aplicações escolhidas como representantes das classes de equivalência-ρ, distintas de $\mathcal{L}_1$. Seja, por exemplo, o bloco*

$$[x_1 + x_2 + x_3|1] = \left\{\mathbf{x} \in G_{[3]}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\right\}$$

constituído pelos tratamentos

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(2,2,0),(0,0,1),(2,1,1),(1,2,1),(2,0,2),(1,1,2),(0,2,2)\}\,. \tag{4.35}$$

As colunas das matrizes $\mathbf{C}^*(x_1)$, $\mathbf{C}^*(x_2)$, $\mathbf{C}^*(x_3)$ e $\mathbf{C}^*(x_1 + 2x_2)$, do tipo 3×9, são constituídas pelas colunas das matrizes $\mathbf{C}(x_1)$, $\mathbf{C}(x_2)$, $\mathbf{C}(x_3)$ e $\mathbf{C}(x_1 + 2x_2)$ (ver

Anexo E), respectivamente, associadas aos vectores (4.35) que pretencem ao bloco seleccionado . Assim,

$$\mathbf{C}^*(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^*(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^*(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{C}^*(x_1 + 2x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada aplicação $\ell_h^*,\ h = 1, ..., m_1^*$ representante da classe de equivalência-ρ, distinta de $\mathcal{L}_1$, define-se a matriz, do tipo $p^{N-s} \times (p-1)$, por

$$\mathbf{A}^*(\ell_h^*) = \frac{1}{\sqrt{p^{N-s-1}}} \left(\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\right)' \mathbf{K}_p,\ h = 1, ...m_1^* \tag{4.36}$$

onde $\mathbf{K}_p$ uma matriz, de ordem $p \times (p-1)$, que se obtém de uma matriz ortogonal estandardizada eliminando a primeira coluna igual a $\frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{1}_p$ (ver Anexo A.4).

Teorema 36. *Sejam $\ell_h^*,\ \ell_{h'}^*$, com $h \neq h'$ e $h, h' = 1, ..., m_1^*$ linearmente independentes entre si e linearmente independentes das aplicações $\ell_1, ..., \ell_s$. Sejam as matrizes associadas às aplicações ℓ_h^* e $\ell_{h'}^*$ dadas por (4.36). Verifica-se que* *a)* $(\mathbf{A}^*(\ell_h^*))' \mathbf{1}_{p^{N-s}} = \mathbf{0}_{(p-1)\times 1}$

b) $(\mathbf{A}^*(\ell_h^*))' \mathbf{A}^*(\ell_h^*) = \mathbf{I}_{p-1}$

c) $(\mathbf{A}^*(\ell_h^*))' \mathbf{A}^*(\ell_{h'}^*) = \mathbf{0}_{(p-1)\times(p-1)}$.

Demonstração. Esta demonstração é semelhante à dos Teoremas 24 e 28.

a) $(\mathbf{A}^*(\ell_h^*))' \mathbf{1}_{p^{N-s}} = \frac{1}{\sqrt{p^{N-s-1}}}\mathbf{K}_p'\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\mathbf{1}_{p^{N-s}} = \sqrt{p^{N-s-1}}\mathbf{K}_p'\mathbf{1}_p = \mathbf{0}_{(p-1)\times 1}$

b) $(\mathbf{A}^*(\ell_h^*))' \mathbf{A}^*(\ell_h^*) = \frac{1}{p^{N-s-1}}\mathbf{K}_p'\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\left(\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\right)'\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p'\mathbf{I}_p\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p'\mathbf{K}_p = \mathbf{I}_{p-1}$

c) $(\mathbf{A}^*(\ell_h^*))' \mathbf{A}^*(\ell_{h'}^*) = \frac{1}{p^{N-s-1}}\mathbf{K}_p'\mathbf{C}^*(\ell_h^*)\left(\mathbf{C}^*(\ell_{h'}^*)\right)'\mathbf{K}_p = \frac{1}{p}\mathbf{K}_p'\mathbf{J}_p\mathbf{K}_p = \frac{1}{p}\mathbf{K}_p'\mathbf{1}_p\mathbf{1}_p'\mathbf{K}_p = \mathbf{0}_{(p-1)\times(p-1)}$. □

Teorema 37. *A matriz*

$$\left[\frac{1}{\sqrt{p^{N-s}}}\mathbf{1}_{p^{N-s}} \;\; \mathbf{A}^*(\ell_1^*) \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}^*(\ell_{m_1^*}^*)\right]$$

onde $\mathbf{A}^*(\ell_h^*), h = 1, ..., m_1^*$ *são dadas por (4.36), é uma diagonalizadora ortogonal associada à AJC completa e regular, que se representa por* $\mathcal{A}\left(p^N \times \frac{1}{p^s}\right)$. *A base principal desta AJC é*

$$bp\left(\mathcal{A}\left(p^N \times \frac{1}{p^s}\right)\right) = \left\{\frac{1}{p^{N-s}}\mathbf{J}_{p^{N-s}}, \mathbf{Q}^*(\ell_1^*), ..., \mathbf{Q}^*(\ell_{m_1^*}^*)\right\}$$

onde $\mathbf{Q}^*(\ell_h^*) = \mathbf{A}^*(\ell_h^*)\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)', h = 1, ..., m_1^*$.

Demonstração. Semelhante à demonstração do Teorema 25. □

Teorema 38. *A matriz*

$$\left[\frac{1}{\sqrt{rp^{N-s}}}\mathbf{1}_{rp^{N-s}} \quad \mathbf{A}^*(\ell_1^*) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}^*(\ell_{m_1^*}^*) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r \quad \mathbf{A}_{m_1^*+1}^*\right]$$

onde $\mathbf{A}_{m_1^*+1}^* = \mathbf{I}_{p^{N-s}} \otimes \mathbf{K}_r$ *é uma diagonalizadora ortogonal associada à AJC completa e regular* $\mathcal{A}\left(p^N \times \frac{1}{p^s}\right) * \mathcal{A}(r)$, *cuja base principal é*

$$bp\left(\mathcal{A}\left(p^N \times \frac{1}{p^s}\right) * \mathcal{A}(r)\right) = \left\{\frac{1}{rp^{N-s}}\mathbf{J}_{rp^{N-s}}, \mathbf{Q}^*(\ell_1^*) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, ..., \mathbf{Q}^*(\ell_{m_1^*}^*) \otimes \frac{1}{r}\mathbf{J}_r, \; \mathbf{Q}_{m_1^*+1}^*\right\}$$

onde $\mathbf{Q}^*(\ell_h^*) = \mathbf{A}^*(\ell_h^*)\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)'$ *com* $\mathbf{A}^*(\ell_h^*), h = 1, ..., m_1^*$ *são dadas por (4.36) e* $\mathbf{Q}_{m_1^*+1}^* = \mathbf{A}_{m_1^*+1}^*\left(\mathbf{A}_{m_1^*+1}^*\right)'$.

O modelo linear estritamente associado à *AJC* $\mathcal{A}\left(p^N \times \frac{1}{p^s}\right) * \mathcal{A}(r)$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{rp^{N-s}}}\mathbf{1}_{rp^{N-s}}\mu + \sum_{h=1}^{m_1^*}\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\boldsymbol{\beta}^*(\ell_h^*) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

na forma canónica é

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\sqrt{rp^{N-s}}}\mathbf{1}_{rp^{N-s}}W_0^* + \sum_{h=1}^{m_1^*}\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)\mathbf{W}^*(\ell_h^*) + \mathbf{A}_{m_1^*+1}^*\mathbf{W}_{m_1^*+1}^* \quad (4.37)$$

onde

$$\begin{cases} W_0^* = \frac{1}{\sqrt{rp^{N-s}}}\mathbf{1}'_{rp^{N-s}}\mathbf{Y} \\ \mathbf{W}^*(\ell_h^*) = \left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\mathbf{Y} \quad h = 1, ..., m_1^* \\ \mathbf{W}_{m_1^*+1}^* = \left(\mathbf{A}_{m_1^*+1}^*\right)'\mathbf{Y} \end{cases}$$

com $\mathbf{A}_{m_1^*+1}^* = \mathbf{I}_{p^{N-s}} \otimes \mathbf{K}_r$. Considerando $S^*(\ell_h^*) = \|\mathbf{W}^*(\ell_h^*)\|^2$, $h = 1, ..., m_1^*$ e $S^* = \left\|\mathbf{W}_{m_1^*+1}^*\right\|^2$ verifica-se, de forma semelhante às secções anteriores, que

$$\begin{cases} \sum_{h=1}^{m_1^*}\left\|(\mathbf{A}^*(\ell_h^*))'\,\mathbf{Y}\right\|^2 = \|\mathbf{Y}\|^2 - \frac{T^2}{p^{N-s}} & r = 1. \\ \sum_{h=1}^{m_1^*} S^*(\ell_h^*) + S^* = \|\mathbf{Y}\|^2 - \frac{T^2}{rp^{N-s}} & r > 1 \end{cases}$$

Assumindo a normalidade e tendo em conta as secções 3.1 e 3.2 tem-se que

$$\begin{cases} \mathbf{W}^*(\ell_h^*) \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}^*\left(\ell_h^*\right), \sigma^2\mathbf{I}_{p-1}\right) \quad h = 1, ..., m_1^* \\ S^* \sim \sigma^2\chi_{(r-1)p^{N-s}} \end{cases}$$

onde

$$\boldsymbol{\lambda}^*\left(\ell_h\right) = \left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)'\boldsymbol{\mu},\ h = 1, ..., m_1^*$$

e também que

$$\begin{cases} \mathbf{W}^*(\ell_h^*) \text{ é } UMVUE \text{ para } \boldsymbol{\lambda}^*(\ell_h^*) \quad h=1,...,m_1^* \\ \frac{S}{(r-1)p^s} \text{ é } UMVUE \text{ para } \sigma^2. \end{cases}$$

Considerando as hipóteses

$$H_0^*(\ell_h^*) : \boldsymbol{\lambda}^*(\ell_h^*) = \mathbf{0},\ h=1,...,m_1^* \tag{4.38}$$

testa-se a ausência dos efeitos principais, se $O(l_h^*) = 0$ e a ausência de interações factoriais entre os factores que figurem em ℓ_h com coeficientes não nulos, se $O(l_h^*) > 0$. Quando as hipóteses $H_0^*(\ell_h^*)$, $h=1,...,m_1^*$ se verificam, tem-se que

$$S_0^*(l_h^*) \sim \sigma^2\chi^2_{p-1},\ h=1,...,m_1^*$$

pelo que,

$$F_0^*(\ell_h^*) = \frac{(r-1)p^{N-s}}{p-1}\frac{S^*(\ell_h)}{S^*} \sim \mathcal{F}_{p-1;(r-1)p^{N-s}},\ h=1,...,m_1^*.$$

Para um nível de significância α deve rejeitar-se a hipótese $H_0^*(l_h^*)$ se

$$F_0^*(l_h^*) > f_{(p-1,(r-1)p^N,1-\alpha)}.$$

Exemplo 21. *Retomando o exemplo 20 e considerando, por exemplo, a matriz*

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

por (4.36) obtêm-se as matrizes

$$\mathbf{A}^*(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^*(x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

e

$$\mathbf{A}^*(x_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^*(x_1 + 2x_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

associadas às aplicações lineares reduzidas representantes das classes de equivalência-ρ, distintas de $\mathcal{L}_1$, ver exemplo 19. Numa réplica fraccionária $\frac{1}{3^2} \times 3^3$ considerando *as hipóteses*

$$H_0^*(x_1) : \boldsymbol{\lambda}^*(x_1) = \mathbf{0}$$
$$H_0^*(x_2) : \boldsymbol{\lambda}^*(x_2) = \mathbf{0}$$
$$H_0^*(x_3) : \boldsymbol{\lambda}^*(x_3) = \mathbf{0}$$
$$H_0^*(x_1 + 2x_2) : \boldsymbol{\lambda}^*(x_1 + 2x_2) = \mathbf{0}$$

onde

$$\boldsymbol{\lambda}^*(x_1) = \left(\mathbf{A}^*(x_1) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu}$$
$$\boldsymbol{\lambda}^*(x_2) = \left(\mathbf{A}^*(x_2) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu}$$
$$\boldsymbol{\lambda}^*(x_3) = \left(\mathbf{A}^*(x_3) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu}$$
$$\boldsymbol{\lambda}^*(x_1 + 2x_2) = \left(\mathbf{A}^*(x_1 + 2x_2) \otimes \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbf{1}_r\right)' \boldsymbol{\mu}$$

testam-se, respectivamente, a ausência dos efeitos dos três factores principais e da interacção de ordem 1 associada à aplicação $x_1 + 2x_2$*. As hipóteses anteriores são equivalentes, respectivamente, a*

$$H_0^*(x_1) : \mu_1^\circ + \mu_6^\circ + \mu_8^\circ = \mu_2^\circ + \mu_4^\circ + \mu_9^\circ = \mu_3^\circ + \mu_5^\circ + \mu_7^\circ$$
$$H_0^*(x_2) : \mu_1^\circ + \mu_4^\circ + \mu_7^\circ = \mu_2^\circ + \mu_5^\circ + \mu_8^\circ = \mu_3^\circ + \mu_6^\circ + \mu_9^\circ$$
$$H_0^*(x_3) : \mu_1^\circ + \mu_2^\circ + \mu_3^\circ = \mu_4^\circ + \mu_5^\circ + \mu_6^\circ = \mu_7^\circ + \mu_8^\circ + \mu_9^\circ$$
$$H_0^*(x_1 + 2x_2) : \mu_1^\circ + \mu_5^\circ + \mu_9^\circ = \mu_2^\circ + \mu_6^\circ + \mu_7^\circ = \mu_3^\circ + \mu_4^\circ + \mu_8^\circ$$

com $\boldsymbol{\mu}^\circ = [\mu_1^\circ ... \mu_9^\circ]'$ *e* $\mu_j^\circ = \mathbb{E}(Y_{ij}), j = 1, ..., 9.$

5. DELINEAMENTO REGRESSIONAL MÚLTIPLO ASSOCIADO A UM FACTORIAL DE BASE PRIMA DE EFEITOS FIXOS

Como já foi referido na introdução considerando para cada tratamento de um modelo base uma RLM nas mesmas variáveis (dependente e explicativas) obtém-se um DRM. Quando o número de observações por regressão é igual diz-se um DRM equilibrado. Caso contrário diz-se um DRM não equilibrado. Nos $DRM's$ estuda-se a acção de um ou mais factores em combinações lineares dos coeficientes das $RLM's$. Nesta tese considera-se que o modelo base é um factorial p^N de efeitos fixos (casos completo, confundimento e fraccionamento). Mostra-se que combinando a abordagem estudada no capítulo 4 e a Teoria do Modelo-**L** é possível extender o estudo dos factoriais p^N e dos $DRM's$ associados aos factoriais p^N ao caso não equilibrado. Antes da exposição sobre os modelos objecto deste capítulo apresenta-se uma exposição sobre o Modelo$-$**L** que inclui resultados desenvolvidos em [30] e [31] necessários nas secções seguintes. Mostra-se também que é possível aplicar ao DRM equilibrado o teste simultâneo para a igualdade de valores médios e esfericidade da matriz de covariâncias [3].

5.1 Modelo$-\mathbf{L}$

5.1.1 Estrutura do modelo e estatísticas

Um modelo-$\mathbf{L}$ é dado por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y}^{\circ} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.1}$$

onde $\mathbf{L}$ é uma matriz, do tipo $n \times n^{\circ}$, associada ao vector $\mathbf{Y}^{\circ}$, cujas colunas são linearmente independentes. Supõe-se que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$, pelo que, $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{Y}) \in \Omega = R(\mathbf{L})$.

Se o vector $\mathbf{Y}^{\circ}$ é dado por

$$\mathbf{Y}^{\circ} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j$$

onde $\boldsymbol{\beta}_1, ..., \boldsymbol{\beta}_m$ são vectores de parâmetros, a família $\{\mathbf{M}_1, ..., \mathbf{M}_m\}$, com $\mathbf{M}_j = \mathbf{X}_j\mathbf{X}_j', j = 1, ..., m$ é constituída por matrizes que comutam e é uma base para uma AJC completa $\mathcal{A}$, o modelo dado por (5.1) designa-se por modelo-$\mathbf{L}$ ortogonal de efeitos fixos, ver [30] e [31]. O modelo dado por (5.1) designa-se por modelo-$\mathbf{L}$ ortogonal de efeitos mistos se $\boldsymbol{\beta}_1, ..., \boldsymbol{\beta}_k$ são vectores de parâmetros, $\boldsymbol{\beta}_{k+1}, ..., \boldsymbol{\beta}_m$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são vectores aleatórios independentes, normalmente distribuídos, com vectores médios nulos e matrizes de variâncias-covariâncias $\sigma_j^2\mathbf{I}_{c_j}, j = k+1, ..., m$ e $\sigma^2\mathbf{I}_n$, respectivamente, ver [10] e [11]. Note-se que o termo "ortogonal"está associado a $\mathbf{Y}^{\circ} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j$ e não a $\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y}^{\circ} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Considerando,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\left(\sum_{j=1}^{m} \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j\right) + \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\mathbf{X}}_j\boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.2}$$

com $\overline{\mathbf{X}}_j = \mathbf{L}\mathbf{X}_j, j = 1, ..., m$ e $\overline{\mathbf{M}}_j = (\mathbf{L}\mathbf{X}_j)(\mathbf{L}\mathbf{X}_j)' = \mathbf{L}\mathbf{M}_j\mathbf{L}',\ j = 1, ..., m$ verifica-se para $i \neq j, i = 1, ..., m$ que, em geral,

$$\overline{\mathbf{M}}_i\overline{\mathbf{M}}_j = \mathbf{L}\mathbf{M}_i\left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)\mathbf{M}_j\mathbf{L}' \neq \mathbf{L}\mathbf{M}_j\left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)\mathbf{M}_i\mathbf{L}' = \overline{\mathbf{M}}_j\overline{\mathbf{M}}_i$$

ou seja, as matrizes $\overline{\mathbf{M}}_i$ e $\overline{\mathbf{M}}_j$ não comutam, pelo que, o modelo (5.1), em geral, não é ortogonal. Mostrou-se em [11] que se

$$\mathbf{L}^+ = \mathbf{L}' \tag{5.3}$$

com $\mathbf{L}^+$ a inversa de *Moore-Penrose* da matriz $\mathbf{L}$, o modelo (5.1) é ortogonal e está associado a uma AJC completa.

Na exposição que se segue considera-se que $\mathbf{Y}^\circ$ é um vector de parâmetros e representa-se por $\boldsymbol{\mu}^\circ$. Dado que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$, tem-se que

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right) \tag{5.4}$$

onde $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}\boldsymbol{\mu}^\circ$. Como $\mathbf{L}$ é uma matriz, do tipo $n \times n^\circ$, com colunas linearmente independentes, ou seja, $car\left(\mathbf{L}\right) = n^\circ$, então

$$\mathbf{L}^+\mathbf{L} = \mathbf{I}_{n^\circ} \tag{5.5}$$

(ver Anexo A.3). A matriz $\mathbf{L}'\mathbf{L}$ tem característica igual à ordem, ou seja, $car\left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right) = car\left(\mathbf{L}\right) = n^\circ$, o que implica que a matriz $\left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)^{-1}$ está definida. Então a inversa de *Moore-Penrose* da matriz $\mathbf{L}$ é dada por

$$\mathbf{L}^+ = \left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{L}' \tag{5.6}$$

e a matriz de projecção ortogonal sobre o subespaço linear Ω por

$$\mathbf{Q}_\Omega = \mathbf{L}\mathbf{L}^+ = \mathbf{L}\left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{L}'$$

(ver anexo A.3). Seja $\Omega^\perp$ o complemento ortogonal de Ω. Representando por $\mathbf{Y}_\Omega$ e $\mathbf{Y}_{\Omega^\perp}$ as projecções ortogonais de $\mathbf{Y}$ em Ω e em $\Omega^\perp$, respectivamente, como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\Omega + \mathbf{Y}_{\Omega^\perp}$$

e verificando-se (5.4), os vectores $\mathbf{Y}_{\Omega}$ e $\mathbf{Y}_{\Omega^{\perp}}$ são independentes e

$$\mathbf{Y}_{\Omega^{\perp}} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}_{n\times 1}, \sigma^2 \mathbf{Q}_{\Omega^{\perp}}\right) \tag{5.7}$$

$$\mathbf{Y}_{\Omega} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{Q}_{\Omega}\right)$$

ver [23]. Dado que $\boldsymbol{\mu} \in \Omega$, logo $\mathbf{Q}_{\Omega}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{Q}_{\Omega^{\perp}}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_{n\times 1}$, obtendo-se

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{\Omega} = \mathbf{Q}_{\Omega}\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\Omega}\left(\mathbf{L}\boldsymbol{\mu}^{\circ} + \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega} \\ \mathbf{Y}_{\Omega^{\perp}} = \mathbf{Q}_{\Omega^{\perp}}\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\Omega^{\perp}}\left(\mathbf{L}\boldsymbol{\mu}^{\circ} + \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega^{\perp}} \end{cases} \tag{5.8}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega^{\perp}}$ representam as projecções ortogonais de $\boldsymbol{\varepsilon}$ em Ω e $\Omega^{\perp}$, respectivamente. Assim

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{\Omega} + \mathbf{Y}_{\Omega^{\perp}} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega^{\perp}}.$$

Tendo em conta que $\mathbf{Q}_{\Omega} + \mathbf{Q}_{\Omega^{\perp}} = \mathbf{I}_n$ e (5.8), a função densidade de $\mathbf{Y}$ dada por

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\sigma^2 \mathbf{I}_n|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'(\sigma^2\mathbf{I}_n)^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}$$

ainda pode ser escrita como

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma^{2n}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{L}\mathbf{z}-\mathbf{L}\boldsymbol{\mu}^{\circ}\|^2 - \frac{s}{2\sigma^2}} \tag{5.9}$$

com

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \mathbf{L}^{+}\mathbf{Y} \\ S = \left\|\mathbf{y}_{\Omega^{\perp}}\right\|^2. \end{cases}$$

Pelo Teorema da factorização (ver Anexo C) verifica-se que $\mathbf{Z}$ e S são estatísticas conjuntamente suficientes. Como a distribuição de $\mathbf{Y}$ pertence à família exponencial e o espaço paramétrico contém um rectângulo com a mesma dimensão, pelo Teorema 68 (ver Anexo C) $\mathbf{Z}$ e S são suficientes e completas.

Como $\mathbf{L}^{+}\left(\mathbf{L}^{+}\right)' = \left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)^{-1}$ e atendendo a (5.4)

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}^{\circ}, \sigma^2\left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)^{-1}\right)$$

(ver Anexo B.2). Dado $\mathbf{Y}_{\Omega}$ e $\mathbf{Y}_{\Omega^{\perp}}$ serem independentes, $\mathbf{Z}$ e S também o são. Como $\mathbf{Q}_{\Omega^{\perp}} = \mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_{\Omega}$ a soma S ainda pode ser escrita como

$$S = \|\mathbf{Y}_{\Omega^{\perp}}\|^2 = \|\mathbf{Y}\|^2 - \|\mathbf{Q}_{\Omega}\mathbf{Y}\|^2.$$

Como $car\left(\mathbf{Q}_{\Omega^{\perp}}\right) = dim\left(\Omega^{\perp}\right) = n - n^{\circ}$, dado (5.1.1) tem-se que

$$S \sim \sigma^2 \chi^2_{n-n^{\circ}}.$$

Seja $\mathcal{A}$ uma AJC completa, constituída por matrizes de ordem $n^{\circ} \times n^{\circ}$, cuja base principal é $bp\left(\mathcal{A}\right) = \{\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_m\}$ onde $\mathbf{Q}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{A}_j', j = 1, ..., m$ e os vectores coluna de $\mathbf{A}_j$ constituem uma base ortonormada para o subespaço linear $R(\mathbf{Q}_j), j = 1, ..., m$, ver secção 2.1. Considerando $\mathbf{W}_j = \mathbf{A}_j'\mathbf{Z},\ j = 1, ..., m$ verifica-se

$$\mathbf{W}_j \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}_j, \sigma^2\mathbf{A}_j'\left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{A}_j\right), j = 1, ..., m$$

onde $\boldsymbol{\lambda}_j = \mathbf{A}_j'\boldsymbol{\mu}^{\circ},\ j = 1, ..., m$. As estatísticas $\mathbf{Z}$ e S são conjuntamente suficientes e completas e como $\mathbb{E}[\mathbf{W}_j] = \boldsymbol{\lambda}_j, j = 1, ..., m$ e $\mathbb{E}\left[\frac{S}{n-n^{\circ}}\right] = \sigma^2$, de acordo com o Teorema 69, (ver Anexo C), tem-se que

$$\begin{cases} \mathbf{W}_j \text{ é } UMVUE \text{ para } \boldsymbol{\lambda}_j,\ j = 1, ..., m \\ \frac{S}{n-n^{\circ}} \text{ é } UMVUE \text{ para } \sigma^2. \end{cases}$$

Utilizando os resultados da secção 3.2 é possível construir intervalos de confiança e formular testes de hipóteses para os parâmetros do modelo.

5.1.2 Factorial p^N completo de efeitos fixos, não equilibrado

Combinando a teoria do Modelo-$\mathbf{L}$ e a abordagem estudada no capítulo 4 é possível considerar um número diferente de observações por tratamento num factorial p^N. Recordando numeram-se os níveis de cada factor de 0 até $p-1$ e os tratamentos pelos vectores $\mathbf{x}_j \in G_{[p]}^N,\ j = 1, ..., p^N$. O vector das observações é representado por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{p^N} \end{bmatrix}$$

onde cada

$$\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} Y_{1j} \\ \vdots \\ Y_{n_j j} \end{bmatrix}$$

corresponde ao vector das n_j observações no tratamento $\mathbf{x}_j$, com $Y_{ij} = Y_i(\mathbf{x}_j),\ i = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., p^N$ e $n = \sum_{j=1}^{p^N} n_j$. Seja o vector médio

$$\boldsymbol{\mu}^\circ = \begin{bmatrix} \mu_1^\circ \\ \vdots \\ \mu_{p^N}^\circ \end{bmatrix}$$

onde $\mu_j^\circ = \mathbb{E}(Y_{ij}),\ i = 1, ..., n_j, j = 1, ..., p^N$. Considerando a matriz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1}_{n_{p^N}} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\left(\mathbf{1}_{n_1}, ..., \mathbf{1}_{n_{p^N}}\right) \tag{5.10}$$

obtém-se

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\boldsymbol{\mu}^\circ + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\left(\mathbf{1}_{n_1}, ..., \mathbf{1}_{n_{p^N}}\right) \begin{bmatrix} \mu_1^\circ \\ \vdots \\ \mu_{p^N}^\circ \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1}\mu_1^\circ \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{n_{p^N}}\mu_{p^N}^\circ \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

um factorial p^N com $n = \sum_{j=1}^{p^N} n_j$ observações.

Como $car(\mathbf{L}) = p^N$ e atendendo a (5.6) a inversa de *Moore-Penrose* da matriz $\mathbf{L}$ é

$$\mathbf{L}^+ = \left(\mathbf{L}'\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1}\mathbf{1}'_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{n_2}\mathbf{1}'_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \frac{1}{n_{p^N}}\mathbf{1}'_{n_{p^N}} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\left(\frac{1}{n_1}\mathbf{1}'_{n_1}, ..., \frac{1}{n_{p^N}}\mathbf{1}'_{n_{p^N}}\right) \tag{5.11}$$

pelo que, a MPO sobre $\Omega = R(\mathbf{L})$ é

$$\mathbf{Q}_\Omega = \mathbf{L}\mathbf{L}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1}\mathbf{J}_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \frac{1}{n_{p^N}}\mathbf{J}_{n_{p^N}} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\left(\frac{1}{n_1}\mathbf{J}_{n_1}, ..., \frac{1}{n_{p^N}}\mathbf{J}_{n_{p^N}}\right)$$

e a MPO sobre $\Omega^\perp$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Omega^\perp} &= \mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} - \frac{1}{n_1}\mathbf{J}_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2} - \frac{1}{n_2}\mathbf{J}_{n_1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{n_{p^N}} - \frac{1}{n_{p^N}}\mathbf{J}_{n_{p^N}} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}\left(\mathbf{I}_{n_1} - \frac{1}{n_1}\mathbf{J}_{n_1}, ..., \mathbf{I}_{n_{n_{p^N}}} - \frac{1}{n_{p^N}}\mathbf{J}_{n_{p^N}}\right). \end{aligned}$$

Tendo em conta (5.11) verifica-se que

$$\mathbf{Z} = \mathbf{L}^+\mathbf{Y} = \mathbf{D}\left(\frac{1}{n_1}\mathbf{1}'_{n_1}, ..., \frac{1}{n_{p^N}}\mathbf{1}'_{n_{p^N}}\right)\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_1}\mathbf{1}'_{n_1}\mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{n_{p^N}}\mathbf{1}'_{n_{p^N}}\mathbf{Y}_{p^N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Y}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{Y}}_{p^N} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{Y}}$$

corresponde ao vector das médias das observações dos p^N tratamentos. Assumindo que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$, tem-se que $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$, onde $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}\boldsymbol{\mu}^\circ$ e

$$\overline{\mathbf{Y}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}^\circ, \sigma^2\mathbf{D}\left(\frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_{p^N}}\right)\right).$$

Considerando a variável aleatória $S = \left\|\mathbf{Y}_{\Omega^\perp}\right\|^2$ tem-se que

$$S \sim \sigma^2\chi^2_{n-p^N},$$

e que S é independente de $\overline{\mathbf{Y}}$. Verifica-se também que $\overline{\mathbf{Y}}$ e S são estatísticas conjuntamente suficientes e completas, logo $\overline{\mathbf{Y}}$ e $\frac{S}{n-p^N}$ são, respectivamente, *UMVUE*'s para $\boldsymbol{\mu}^\circ$ e σ^2, (ver Anexo C).

Atendendo à secção 4.1 a família $\left\{\frac{1}{p^N}\mathbf{J}_{p^N},\ \mathbf{Q}(\ell_1), ..., \mathbf{Q}(\ell_m)\right\}$, com $\mathbf{Q}(\ell_h) = \mathbf{A}(\ell_h)\mathbf{A}'(\ell_h), h = 1, ..., m$ e $\mathbf{A}(\ell_h)$ dadas por (4.12), com $\ell_1, ..., \ell_m \in \mathcal{L}^N_{r[p]}$, é a base principal da *AJC* completa e regular $\mathcal{A}\left(p^N\right)$. Assim,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\boldsymbol{\mu}^\circ + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\left(\mathbf{1}_{n_1}, ..., \mathbf{1}_{n_{p^N}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{p^N}}\mathbf{1}_{p^N}\mu + \sum_{h=1}^{m}\mathbf{A}(\ell_h)\boldsymbol{\beta}(\ell_h)\right) + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (5.12)$$

é um modelo-$\mathbf{L}$ ortogonal de efeitos fixos. Os vectores de parâmetros $\boldsymbol{\beta}(\ell_h), h = 1, ..., m$ estão associados aos efeitos principais quando $O(\ell_h) = 0$ e estão associados às interacções factoriais se $O(\ell_h) > 0$, como no capítulo anterior. Considerando

$$\mathbf{W}\left(\ell_h\right) = \mathbf{A}'\left(\ell_h\right)\overline{\mathbf{Y}},\ h = 1, ..., m \qquad (5.13)$$

vem

$$\mathbf{W}\left(\ell_h\right) \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\lambda}\left(\ell_h\right), \sigma^2\mathbf{A}'\left(\ell_h\right)\mathbf{D}\left(\frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_{p^N}}\right)\mathbf{A}\left(\ell_h\right)\right), h = 1, ..., m \qquad (5.14)$$

onde

$$\boldsymbol{\lambda}\left(\ell_h\right) = \mathbf{A}'\left(\ell_h\right)\boldsymbol{\mu}^\circ,\ h = 1, ..., m. \qquad (5.15)$$

Considerando as hipóteses

$$H_0(\ell_h) : \boldsymbol{\lambda}(\ell_h) = \mathbf{0},\ h = 1, ..., m$$

com $\boldsymbol{\lambda}(\ell_h), h = 1, ..., m$ dados por (5.15), como no factorial p^N equilibrado, se $O(\ell_h) = 0$ testa-se a ausência do efeito principal associado à aplicação reduzida ℓ_h e se $O(\ell_h) > 0$ testa-se a ausência da interacção factorial entre os factores que figuram em ℓ_h com coeficientes não nulos.

Atendendo a (5.14) e considerando $g(\ell_h) = car\left(\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{D}\left(\frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_{p^N}}\right)\mathbf{A}(\ell_h)\right)$ para $h = 1, ..., m$ verifica-se sob validade de $H_0(\ell_h)$ que

$$S_0(\ell_h) = \mathbf{W}'(\ell_h)\left(\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{D}\left(\frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_{p^N}}\right)\mathbf{A}(\ell_h)\right)^{+}\mathbf{W}(\ell_h) \sim \sigma^2\chi^2_{g(\ell_h)},\ h = 1, ..., m$$

(ver Anexo B.3). Como $S_0(\ell_h)$ e S são variáveis aleatórias independentes

$$F_0(\ell_h) = \frac{n - p^N}{g(\ell_h)}\frac{S_0(\ell_h)}{S} \sim \mathcal{F}_{g(\ell_h);n-p^N},\ h = 1, ..., m.$$

Para um nível de significância α deve rejeitar-se $H_0(\ell_h)$ se

$$F_0(\ell_h) > f_{(g(\ell_h),n-p^N,1-\alpha)}$$

ver secção 3.2 e $f_{(g(\ell_h),n-p^N,1-\alpha)}$ é o quantil da distribução $\mathcal{F}$ com $g(\ell_h)$ e $n - p^N$ graus de liberdade, para a probabilidade $1 - \alpha$.

Exemplo 22. *Para ilustrar a exposição desta secção considera-se, por exemplo, um factorial* 3^2, *com* $n = 32$ *observações,*

É necessário considerar

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}(\mathbf{1}_2, \mathbf{1}_4, \mathbf{1}_4, \mathbf{1}_3, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3, \mathbf{1}_4, \mathbf{1}_7, \mathbf{1}_5)$$

e

$$\overline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Y}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{Y}}_9 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{+}\mathbf{Y}$$

	0	1	2	
0	$n_1 = 2$	$n_4 = 3$	$n_7 = 4$	
1	$n_2 = 4$	$n_5 = 2$	$n_8 = 7$	
2	$n_3 = 4$	$n_6 = 3$	$n_9 = 5$	
				$n = 32$

Tab. 5.1: Número de observações por tratamento num factorial 3^2

onde

$$\mathbf{L}^{+} = \mathbf{D}\left(\frac{1}{2}\mathbf{1}_2', \frac{1}{4}\mathbf{1}_4', \frac{1}{4}\mathbf{1}_4', \frac{1}{3}\mathbf{1}_3', \frac{1}{2}\mathbf{1}_2', \frac{1}{3}\mathbf{1}_3', \frac{1}{4}\mathbf{1}_4', \frac{1}{7}\mathbf{1}_7', \frac{1}{5}\mathbf{1}_5'\right).$$

Para $p = 3$ e $N = 2$, tendo em conta exemplos da secção 4.1, tem-se $\mathcal{L}^2_{r[3]} = \{\ x_1,\ x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2\}$ e as matrizes $\mathbf{A}(x_1)$, $\mathbf{A}(x_2)$, $\mathbf{A}(x_1 + x_2)$, $\mathbf{A}(x_1 + 2x_2)$ são dadas por (4.13)-(4.16). As hipóteses dadas por

$$\begin{cases} H_0(x_1) : \boldsymbol{\lambda}(x_1) = \mathbf{0} \\ H_0(x_2) : \boldsymbol{\lambda}(x_2) = \mathbf{0} \\ H_0(x_1 + x_2) : \boldsymbol{\lambda}(x_1 + x_2) = \mathbf{0} \\ H_0(x_1 + 2x_2) : \boldsymbol{\lambda}(x_1 + 2x_2) = \mathbf{0} \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(x_1) = \mathbf{A}'(x_1)\boldsymbol{\mu}^{\circ} \\ \boldsymbol{\lambda}(x_2) = \mathbf{A}'(x_2)\boldsymbol{\mu}^{\circ} \\ \boldsymbol{\lambda}(x_1 + x_2) = \mathbf{A}'(x_1 + x_2)\boldsymbol{\mu}^{\circ} \\ \boldsymbol{\lambda}(x_1 + 2x_2) = \mathbf{A}'(x_1 + 2x_2)\boldsymbol{\mu}^{\circ} \end{cases}$$

são equivalentes a

$$\begin{cases} H_0\left(x_1\right): \mu_1^\circ+\mu_4^\circ+\mu_7^\circ=\mu_2^\circ+\mu_5^\circ+\mu_8^\circ=\mu_3^\circ+\mu_6^\circ+\mu_9^\circ \\ H_0\left(x_2\right): \mu_1^\circ+\mu_2^\circ+\mu_3^\circ=\mu_4^\circ+\mu_5^\circ+\mu_6^\circ=\mu_7^\circ+\mu_8^\circ+\mu_9^\circ \\ H_0\left(x_1+x_2\right): \mu_1^\circ+\mu_6^\circ+\mu_8^\circ=\mu_2^\circ+\mu_4^\circ+\mu_9^\circ=\mu_3^\circ+\mu_5^\circ+\mu_7^\circ \\ H_0\left(x_1+2x_2\right): \mu_1^\circ+\mu_5^\circ+\mu_9^\circ=\mu_2^\circ+\mu_6^\circ+\mu_7^\circ=\mu_3^\circ+\mu_4^\circ+\mu_8^\circ. \end{cases}$$

Através destas hipóteses testa-se a ausência dos efeitos dos factores principais e da interacção factorial entre os dois factores.

5.2 Delineamento regressional múltiplo

5.2.1 Associado a um factorial p^N (completo)

Seja um DRM associado a um factorial p^N, isto é, para cada tratamento $\mathbf{x}_j, j = 1, ..., p^N$ do factorial p^N, está definida uma RLM nas mesmas variáveis (dependente e explicativas),

$$\mathbf{Y}_j^* = \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j^*,\ j = 1, ..., p^N \tag{5.16}$$

onde

$$\mathbf{Y}_j^* = \begin{bmatrix} Y_{1j}^* \\ \vdots \\ Y_{n_j j}^* \end{bmatrix}_{n_j \times 1}$$ é o vector das n_j observações da variável dependente no tratamento $\mathbf{x}_j$

$$\boldsymbol{\beta}_j = \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{kj} \end{bmatrix}_{k \times 1}$$ é o vector dos k coeficientes da regressão no tratamento $\mathbf{x}_j$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_j j} \end{bmatrix}_{n_j \times 1}$$ é o vector dos erros aleatórios no tratamento $\mathbf{x}_j$

e $\mathbf{X}_j(n_j \times k)$ é a matriz do modelo no tratamento $\mathbf{x}_j$. Assume-se que

$$car(\mathbf{X}_j) = k < n_j,\ j = 1, ..., p^N \tag{5.17}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^*,\ j = 1, ..., p^N \textit{são independentes} \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^* \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0},\ \sigma^2 \mathbf{I}_{n_j}\right),\ j = 1, ..., p^N. \tag{5.19}$$

Considerando a matriz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_{p^N} \end{bmatrix}_{(n \times kp^N)} = \mathbf{D}\left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_{p^N}\right) \tag{5.20}$$

e os vectores

$$\mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{p^N}^* \end{bmatrix}_{n \times 1} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_\mathbf{1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{p^N} \end{bmatrix}_{kp^N \times 1} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{p^N}^* \end{bmatrix}_{n \times 1} \tag{5.21}$$

com $n = \sum_{j=1}^{p^N} n_j$, que resultam de agrupar numa única coluna os vectores das observações da variável dependente, dos coeficientes de regressão e dos erros aleatórios, respectivamente, associados aos vários tratamentos, as p^N equações dadas por (5.16) podem ser representadas por

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{L}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*. \tag{5.22}$$

Por (5.17) garante-se que

$$car\left(\mathbf{D}\left(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_{p^N}\right)\right) = kp^N. \tag{5.23}$$

Por (5.18)-(5.19) tem-se que $\boldsymbol{\varepsilon}^* \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$, logo $\mathbf{Y}^* \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{L}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$ e consequentemente

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_j^* \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j,\ \sigma^2 \mathbf{I}_{n_j}\right),\ j = 1, ..., p^N \\ \mathbf{Y}_j^*, j = 1, ..., p^N\ \textit{são independentes.} \end{cases}$$

Assim e tendo em conta resultados do Anexo D para cada tratamento $\mathbf{x}_j \in G_{[p]}^N$,

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_j = \left(\mathbf{X}_j'\mathbf{X}_j\right)^{-1}\mathbf{X}_j'\mathbf{Y}_j^*,\ j = 1, ..., p^N \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_j \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}_j, \sigma^2\left(\mathbf{X}_j'\mathbf{X}_j\right)^{-1}\right),\ j = 1, ..., p^N \\ SQRE_j = \left\|\mathbf{e}_j^*\right\|^2 \sim \sigma^2\chi^2_{n_j-k},\ j = 1, ..., p^N \\ \mathbf{e}_j^* = \mathbf{Y}_j^* - \mathbf{X}_j\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j,\ j = 1, ..., p^N \end{cases}$$

Por (5.6), (5.20) e (5.23) a inversa de *Moore-Penrose* da matriz $\mathbf{L}$ é dada por

$$\mathbf{L}^+ = \mathbf{D}\left(\left(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\right)^{-1}\mathbf{X}_1', ..., \left(\mathbf{X}_{p^N}'\mathbf{X}_{p^N}\right)^{-1}\mathbf{X}_{p^N}'\right)$$

e as componentes do vector

$$\mathbf{L}^+\mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\right)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1^* \\ \vdots \\ \left(\mathbf{X}_{p^N}'\mathbf{X}_{p^N}\right)^{-1}\mathbf{X}_{p^N}'\mathbf{Y}_{p^N}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \vdots \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{p^N} \end{bmatrix} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} \tag{5.24}$$

são os estimadores dos coeficientes das p^N regressões. Verifica-se que

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{D}\left(\left(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\right)^{-1}, ..., \left(\mathbf{X}_{p^N}'\mathbf{X}_{p^N}\right)^{-1}\right)\right) \tag{5.25}$$

e que os vectores $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j$ $j = 1, ..., p^N$ são independentes. Como $SQRE_j \sim \sigma^2\chi^2_{n_j-k}$ e são independentes verifica-se que,

$$\widetilde{S} = \sum_{j=1}^{p^N} SQRE_j \sim \sigma^2\chi^2_{n-kp^N} \tag{5.26}$$

onde

$$\widetilde{S} = \sum_{j=1}^{p^N}\left\|\mathbf{Y}_j^* - \mathbf{X}_j\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j\right\|^2 = \left\|\mathbf{Y}^* - \mathbf{L}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right\|^2 = \left\|(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_\Omega)\mathbf{Y}^*\right\|^2 = \left\|\mathbf{Y}^* - \mathbf{Q}_\Omega\mathbf{Y}^*\right\|^2 = \left\|\mathbf{Y}^*_{\Omega^\perp}\right\|^2.$$

Como

$$f_{\mathbf{Y}^*}(\mathbf{y}^*) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\sigma^{2n}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\|\mathbf{L}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{L}\boldsymbol{\beta}\right\|^2-\frac{\widetilde{s}}{2\sigma^2}}$$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\widetilde{S}$ são estatísticas conjuntamente suficientes e completas (ver Anexo C).

Seja um vector constante

$$\mathbf{a} = [a_1 ... a_k]'.$$

Para cada tratamento do factorial p^N consideram-se combinações lineares do vector dos coeficientes de regressão

$$\boldsymbol{\mu}^{\circ}_{p^N \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_{p^N} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

e dos respectivos estimadores

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_{p^N \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{p^N} \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

onde

$$\begin{cases} \mu^{\circ}_j = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_j, \ j = 1, ..., p^N \\ \widetilde{Y}_j = \mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j, j = 1, ..., p^N. \end{cases}$$

Tendo em conta (5.25) verifica-se que

$$\widetilde{\mathbf{Y}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}^{\circ}, \ \sigma^2 \mathbf{D}(d_1, ..., d_{p^N})\right) \tag{5.29}$$

onde

$$d_j = \mathbf{a}'\left(\mathbf{X}_j'\mathbf{X}_j\right)^{-1}\mathbf{a}, \ j = 1, ..., p^N. \tag{5.30}$$

Como $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\widetilde{S}$ são estatísticas conjuntamente suficientes, completas e

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\widetilde{\mathbf{Y}}) = \boldsymbol{\mu}^{\circ} \\ \mathbb{E}\left(\frac{\widetilde{S}}{n-kp^N}\right) = \sigma^2 \end{cases}$$

então $\widetilde{\mathbf{Y}}$ é *UMVUE* para $\boldsymbol{\mu}^{\circ}$ e $\frac{\widetilde{S}}{n-kp^N}$ para σ^2, (ver Anexo C).

Tal como num factorial p^N com $n_1, ..., n_{p^N}$ observações por tratamento, também num DRM associado a um factorial p^N, com $n_1, ..., n_{p^N}$ observações por regressão, desenvolvem-se testes de hipóteses para testar a influência dos factores mas, agora em combinações lineares dos coeficientes das regressões lineares. Dado que os tratamentos dos dois modelos são os mesmos então utiliza-se para $\widetilde{\mathbf{Y}}$ o mesmo procedimento que foi utilizado na sub-secção 5.1.2 para $\overline{\mathbf{Y}}$. Assim, tendo em conta a secção 4.1, seja a AJC completa e regular $\mathcal{A}\left(p^N\right)$ cuja base principal é $\left\{\frac{1}{p^N}\mathbf{J}_{p^N},\ \mathbf{Q}(\ell_1), ..., \mathbf{Q}(\ell_m)\right\}$, onde

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\ell_h) = \mathbf{A}(\ell_h)\mathbf{A}'(\ell_h), h = 1, ..., m \\ \mathbf{A}(\ell_h), h = 1, ..., m \text{ dadas por } (4.12) \\ \ell_1, ..., \ell_m \in \mathcal{L}^N_{r[p]}. \end{cases}$$

Considerando

$$\widetilde{\mathbf{W}}(\ell_h) = \mathbf{A}'(\ell_h)\widetilde{\mathbf{Y}},\ h = 1, ..., m \tag{5.31}$$

com $\widetilde{\mathbf{Y}}$ dado por (5.28) e como se tem (5.29) verifica-se que

$$\widetilde{\mathbf{W}}(\ell_h) \sim \mathcal{N}\left(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(\ell_h),\ \sigma^2\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{D}(d_1, ..., d_{p^N})\mathbf{A}(\ell_h)\right),\ h = 1, ..., m \tag{5.32}$$

onde

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(\ell_h) = \mathbf{A}'(\ell_h)\boldsymbol{\mu}^\circ, h = 1, ..., m \\ d_j, j = 1, ..., p^N \text{ dados por } (5.30) \\ \boldsymbol{\mu}^\circ \text{ dado por } (5.27). \end{cases}$$

Considerando as hipóteses

$$H_0(\ell_h) : \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(\ell_h) = \mathbf{0},\ h = 1, ..., m, \tag{5.33}$$

testa-se a ausência dos efeitos principais (se $O(\ell) = 0$) e da interacção factorial entre os factores que figurem em ℓ_h com coeficientes não nulos (se $O(\ell) > 0$), em combinações lineares dos coeficientes das p^N regressões. Considerando

$$\widetilde{S}_0(\ell_h) = \widetilde{\mathbf{W}}'(\ell_h)\left(\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{D}(d_1, ..., d_{p^N})\mathbf{A}(\ell_h)\right)^+\widetilde{\mathbf{W}}(\ell_h),\ h = 1, ..., m$$

e $g(\ell_h) = car\left(\mathbf{A}'(\ell_h)\,\mathbf{D}\left(d_1, ..., d_{p^N}\right)\mathbf{A}(\ell_h)\right), h = 1, ..., m$ verifica-se, sob validade de $H_0(\ell_h), h = 1, ..., m$ que

$$\widetilde{S}_0(\ell_h) \sim \sigma^2\chi^2_{g(\ell_h)},\ h = 1, ..., m$$

e consequentemente

$$\widetilde{F}_0(\ell_h) = \frac{n - kp^N}{g(\ell_h)}\frac{\widetilde{S}_0(\ell_h)}{\widetilde{S}} \sim \mathcal{F}_{(g(\ell_h);n-kp^N)},\ h = 1, ..., m$$

pois $S_0(\ell_h)$ e $\widetilde{S}$ são independentes, com $\widetilde{S}$ dada por (5.26). Deve rejeitar-se $H_0(\ell_h)$, para um nível de significância α, se

$$\widetilde{F}_0(\ell_h) > f_{(g(\ell_h);n-kp^N;1-\alpha)},\ h = 1, ..., m.$$

Exemplo 23. *Seja um factorial* 3^2 *e para cada tratamento considera-se uma RLM nas mesmas variáveis. Tendo em conta exemplos da secção 4.1, quando* $p = 3$ *e* $N = 2$*, a família das aplicações reduzidas de* $\mathcal{L}^2_{[3]}$ *é* $\mathcal{L}^2_{r[3]} = \{\ x_1,\ x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2\}$ *e as matrizes* $\mathbf{A}(x_1),\ \mathbf{A}(x_2),\ \mathbf{A}(x_1 + x_2)$ *e* $\mathbf{A}(x_1 + 2x_2)$ *são dadas por (4.13)-(4.16). As hipóteses a considerar agora no DRM associado ao factorial* 3^2 *para testar a ausência dos dois efeitos principais e da interação factorial (em combinações lineares dos coeficientes das regressões lineares) são*

$$\begin{cases} H_0(x_1) : \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(x_1) = \mathbf{0} \\ H_0(x_2) : \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(x_2) = \mathbf{0} \\ H_0(x_1 + x_2) : \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(x_1 + x_2) = \mathbf{0} \\ H_0(x_1 + 2x_2) : \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(x_1 + 2x_2) = \mathbf{0} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} H_0(x_1) : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_4 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_7 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_5 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_8 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_3 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_6 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 \\ H_0(x_2) : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_4 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_5 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_6 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_7 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_8 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 \\ H_0(x_1 + x_2) : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_6 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_8 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_4 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_3 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_5 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_7 \\ H_0(x_1 + 2x_2) : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_5 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_6 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_7 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_3 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_4 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_8 \end{cases}$$

onde

$$\boldsymbol{\mu}^{\circ} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 \end{bmatrix}.$$

Se o DRM associado ao factorial p^N é equilibrado, isto é, se $n_1 = ... = n_{p^N} = n$, as matrizes para as diferentes regressões são iguais, $\mathbf{X}_1 = ... = \mathbf{X}_{p^N} = \mathbf{X}$ e as p^N equações (5.16) também podem ser representadas por $\mathbf{Y}^* = \mathbf{L}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$ mas agora $\mathbf{L} = \mathbf{D}(\mathbf{X}, \mathbf{X}, ..., \mathbf{X})$. Assumindo que $car(\mathbf{X}) = k < n$, (5.18) e (5.19), com as devidas alterações aplica-se a exposição anterior.

5.2.2 Associado ao confundimento de um factorial p^N em p^s blocos

Recordando a secção 4.2, para agrupar os p^N tratamentos em p^s blocos ($s < N$) seleccionam-se s aplicações de $\mathcal{L}^N_{r[p]}$ (associadas aos efeitos que se pretendem confundir [1]) linearmente independentes e o subespaço linear $\mathcal{L}_1$ gerado por essas aplicações. Seja a AJC completa e regular $\mathcal{A}^{\circ}(p^N)$ (sub-AJC principal de $\mathcal{A}(p^N)$) com base principal

$$\left\{\frac{1}{p^N}\mathbf{J}_{p^N}, \mathbf{Q}(\mathcal{L}_1), \mathbf{Q}(\ell_h), h = m_1 + 1, ..., m\right\}$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathcal{L}_1) = \mathbf{A}(\mathcal{L}_1)\mathbf{A}'(\mathcal{L}_1) \\ \mathbf{A}(\mathcal{L}_1) \text{ dada por } (4.22) \end{cases}$$

[1] Geralmente, as aplicações seleccionadas para construir os blocos são escolhidas de forma a que os efeitos principais e interacções de baixa ordem não sejam confundidos com os blocos.

e

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\ell_h) = \mathbf{A}(\ell_h)\mathbf{A}'(\ell_h), \ h = m_1 + 1, ..., m \\ \mathbf{A}(\ell_h) \text{ dadas por } (4.12) \\ \ell_{m_1+1}, ..., \ell_m \in \mathcal{L}_{r[p]}^N - \mathcal{L}_{1r} \\ m_1 = \frac{p^s - 1}{p - 1} \end{cases}$$

Para cada tratamento do factorial p^N confundido com p^s blocos define-se uma RLM nas mesmas variáveis (dependente e explicativas). As p^N regressões podem ser representadas por (5.22) e a exposição da secção anterior utilizada neste caso. Assim, sejam

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{W}}\left(\mathcal{L}_1\right) = \mathbf{A}'\left(\mathcal{L}_1\right)\widetilde{\mathbf{Y}} \\ \widetilde{\mathbf{W}}(\ell_h) = \mathbf{A}'(\ell_h)\widetilde{\mathbf{Y}}, \ h = m_1 + 1, ..., m \end{cases}$$

onde $\widetilde{\mathbf{Y}} = \left[\mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1, ..., \mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{p^{N-s}}\right]'$ e $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ dado por (5.24). Verifica-se que

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{W}}\left(\mathcal{L}_1\right) \sim \mathcal{N}\left(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}\left(\mathcal{L}_1\right), \ \sigma^2\mathbf{A}'\left(\mathcal{L}_1\right)\mathbf{D}(d_1, ..., d_{p^N})\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right)\right) \\ \widetilde{\mathbf{W}}(\ell_h) \sim \mathcal{N}\left(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(\ell_h), \ \sigma^2\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{D}(d_1, ..., d_{p^N})\mathbf{A}(\ell_h)\right), \ h = m_1 + 1, ..., m \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}\left(\mathcal{L}_1\right) = \mathbf{A}'\left(\mathcal{L}_1\right)\boldsymbol{\mu}^\circ \\ \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(\ell_h) = \mathbf{A}'(\ell_h)\boldsymbol{\mu}^\circ, \ h = m_1 + 1, ..., m \end{cases}$$

e $\boldsymbol{\mu}^\circ = \left[\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1, ..., \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}p^{N-s}\right]$. Considerando a hipótese

$$H_0\left(\mathcal{L}_1\right) : \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}\left(\mathcal{L}_1\right) = \mathbf{0}$$

testa-se o efeito do factor Bloco. Considerando as hipóteses

$$H_0\left(\ell_h\right) : \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}\left(\ell_h\right) = \mathbf{0}, h = m_1 + 1, ..., m$$

testa-se a ausência dos efeitos principais (se $O(l_h) = 0$) e de interacções factorias (se $O(l_h) > 0$) que não estão confundidos com os blocos. Considerando

$$\begin{cases} \widetilde{S}_0\left(\mathcal{L}_1\right) = \widetilde{\mathbf{W}}'\left(\mathcal{L}_1\right)\left(\mathbf{A}'\left(\mathcal{L}_1\right)\mathbf{D}(d_1, ..., d_{p^N})\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right)\right)^+\widetilde{\mathbf{W}}\left(\mathcal{L}_1\right) \\ \widetilde{S}(\ell_h) = \widetilde{\mathbf{W}}'(\ell_h)\left(\mathbf{A}'(\ell_h)\mathbf{D}(d_1, ..., d_{p^N})\mathbf{A}(\ell_h)\right)^+\widetilde{\mathbf{W}}(\ell_h), \ h = m_1 + 1, ..., m \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} g\left(\mathcal{L}_1\right) = car\left(\mathbf{A}'\left(\mathcal{L}_1\right)\mathbf{D}(d_1,...,d_{p^N})\mathbf{A}\left(\mathcal{L}_1\right)\right) \\ g(\ell_h) = car\left(\mathbf{A}'\left(\ell_h\right)\mathbf{D}\left(d_1,...,d_{p^N}\right)\mathbf{A}\left(\ell_h\right)\right),\ h = m_1+1,...,m \end{cases}$$

verifica-se, sob validade de $H_0\left(\mathcal{L}_1\right)$ e de $H_0(\ell_h),\ h = m_1+1,...,m$ que

$$\begin{cases} \widetilde{S}_0\left(\mathcal{L}_1\right) \sim \sigma^2\chi^2_{g(\mathcal{L}_1)} \\ \widetilde{S}_0(\ell_h) \sim \sigma^2\chi^2_{g(\ell_h)},\ h = m_1+1,...,m \end{cases}$$

pelo que,

$$\begin{cases} \widetilde{F_0}\left(\mathcal{L}_1\right) = \frac{n-kp^N}{g(\mathcal{L}_1)}\frac{\widetilde{S}_0(\mathcal{L}_1)}{\widetilde{S}} \sim \mathcal{F}_{(g(\mathcal{L}_1),n-kp^N)} \\ \widetilde{F_0}\left(\ell_h\right) = \frac{n-kp^N}{g(\ell_h)}\frac{\widetilde{S}_0(\ell_h)}{\widetilde{S}} \sim \mathcal{F}_{(g(\ell_h),n-kp^N)},\ h = m_1+1,...,m \end{cases}$$

5.2.3 Associado a uma réplica fraccionária $\frac{1}{p^s} \times p^N$

Nesta secção considera-se como modelo base do *DRM* uma réplica fraccionária $\frac{1}{p^s}\times p^N,\ s < N$. Utiliza-se apenas uma fracção p^{N-s} do número total de tratamentos, ou seja, considera-se apenas um dos blocos. Para cada tratamento

$$\mathbf{x}^*_j,\ j = 1,...,p^{N-s}$$

pertencente ao bloco seleccionado consideram-se combinações lineares dos vectores dos coeficientes das regressões e dos respectivos estimadores

$$\boldsymbol{\mu}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_{p^{N-s}} \end{bmatrix}_{p^{N-s}\times 1} \qquad \widetilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{p^{N-s}} \end{bmatrix}_{p^{N-s}\times 1}$$

onde $\mathbf{a}$ é um vector constante e

$$\begin{cases} \mu^\circ_j = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_j,\ j = 1,...,p^{N-s} \\ \widetilde{Y}_j = \mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j, j = 1,...,p^{N-s}. \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_j = \left(\mathbf{X}'_j\mathbf{X}_j\right)^{-1}\mathbf{X}'_j\mathbf{Y}^*_j,\ j = 1,...,p^{N-s}. \end{cases}$$

Relembrando a secção 4.3, $\mathcal{A}\left(\frac{1}{p^s}\otimes p^N\right)$ é uma AJC completa e regular com base principal

$$bp\left(\mathcal{A}\left(p^N\otimes\frac{1}{p^s}\right)\right)=\left\{\frac{1}{p^{N-s}}\mathbf{J}_{p^{N-s}},\mathbf{Q}^*(\ell_1^*),...,\mathbf{Q}^*(\ell_{m_1^*}^*)\right\}$$

onde

$$\begin{cases}\mathbf{Q}^*(\ell_h^*)=\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)',h=1,...,m_1^*\\ \mathbf{A}^*(\ell_h^*),h=1,...,m_1^* \text{ dadas por (4.36)}\\ \ell_h^*,\ h=1,...,m_1^* \text{ representantes das classe de equivalência-}\rho,\ \text{distintas de } \mathcal{L}_1\\ m_1^*=\frac{p^{N-s}-1}{p-1}\end{cases}$$

Considerando

$$\widetilde{\mathbf{W}}^*(\ell_h)=\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)'\widetilde{\mathbf{Y}},\ h=1,...,m_1^*$$

verifica-se que

$$\widetilde{\mathbf{W}}^*(\ell_h)\sim\mathcal{N}\left(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(\ell_h^*),\ \sigma^2\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)'\mathbf{D}(d_1,...,d_{p^{N-s}})\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right),\ h=1,...,m_1^*$$

onde

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(\ell_h^*)=\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)'\boldsymbol{\mu}^\circ,h=1,...,m_1^*\\ d_j=\mathbf{a}'\left(\mathbf{X}_j'\mathbf{X}_j\right)^{-1}\mathbf{a},\ j=1,...,p^{N-s}.\end{cases}$$

Utilizando as hipóteses

$$H_0^*(\ell_h^*):\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^*(\ell_h^*)=\mathbf{0},h=1,...,m_1^*$$

testam-se os efeitos associados às aplicações representantes $\ell_1^*,...,\ell_{m_1^*}^*$. Admitindo a validade das hipóteses $H_0^*(\ell_h^*),\ h=1,...,m_1^*$

$$\widetilde{S}_0^*(\ell_h^*)\sim\sigma^2\chi^2_{g(\ell_h^*)},\ h=1,...,m_1^*$$

onde

$$\begin{cases}\widetilde{S}_0^*(\ell_h^*)=\left(\widetilde{\mathbf{W}}^*(\ell_h^*)\right)'\left(\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)'\mathbf{D}(d_1,...,d_{p^{N-s}})\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)^+\widetilde{\mathbf{W}}^*(\ell_h^*),\ h=1,...,m_1^*\\ g^*(\ell_h^*)=car\left(\left(\mathbf{A}^*(\ell_h^*)\right)'\mathbf{D}\left(d_1,...,d_{p^N}\right)\mathbf{A}^*\left(\ell_h^*\right)\right),\ h=1,...,m_1^*\end{cases}$$

Consequentemente,

$$\widetilde{F_0}^*(\ell_h) = \frac{n - kp^{N-s}}{g(\ell_h^*)} \frac{\widetilde{S}_0^*(\ell_h^*)}{\widetilde{S}} \sim \mathcal{F}_{(g(\ell_h^*), n-kp^{N-s})}$$

com $\widetilde{S} = \sum_{j=1}^{p^{N-s}} SQRE_j = \sum_{j=1}^{p^{N-s}} ||\mathbf{e}_j^*||^2$.

Exemplo 24. *Supor que para cada tratamento de uma réplica fraccionária* $\frac{1}{3^3} \times 3 = 3^{3-1}$ *se considera uma RLM nas mesmas variáveis (dependente e explicativas). Para obter uma fracção* 3^{3-1} *(ver secção 4.3) escolhe-se uma aplicação de* $\mathcal{L}^3_{r[3]}$ *e seleciona-se um dos* 3 *blocos* [2]. *Cada bloco tem* $3^2 = 9$ *tratamentos. Por exemplo, considerem-se a aplicação* $x_1 + x_2 + x_3$ *e o bloco* $[x_1 + x_2 + x_3|1]$ *constituído pelos tratamentos indicados na figura 5.2. Tendo em conta as classes de equivalência-*ρ*, distinta de* $\mathcal{L}_1$*, obtidas no exemplo 19, as aplicações*

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_1 + 2x_2$$

podem ser escolhidas como representantes das classes de equivalência-ρ*.*

[2] Relembrando, as aplicações utilizadas para obter os blocos devem ser escolhidas de forma a que as aplicações associadas aos efeitos principais e às interacções factoriais de baixa ordem (tanto quanto possível) não sejam confundidas com os blocos e não pertençam à mesma classe de equivalência-ρ, distinta da classe $\mathcal{L}_1$.

Tab. 5.2: Fracções 3^{3-2} com $x_1 + x_2 + x_3$ confundida

Bloco 1	**Bloco 2**	Bloco 3
$b = 0$	$b = 1$	$b = 3$
$(0, 0, 0)$	**(1,0,0)**	$(2, 0, 0)$
$(2, 1, 0)$	**(0,1,0)**	$(0, 1, 0)$
$(1, 2, 0)$	**(2,2,0)**	$(0, 2, 0)$
$(2, 0, 1)$	**(0,0,1)**	$(1, 0, 1)$
$(1, 1, 1)$	**(2,1,1)**	$(0, 1, 1)$
$(0, 2, 1)$	**(1,2,1)**	$(2, 2, 1)$
$(1, 0, 2)$	**(2,0,2)**	$(0, 0, 2)$
$(0, 1, 2)$	**(1,1,2)**	$(2, 1, 2)$
$(2, 2, 2)$	**(0,2,2)**	$(1, 2, 2)$

Considerando as hipóteses

$$H_0^* (x_1) : \boldsymbol{\lambda}^* (x_1) = \mathbf{0}$$
$$H_0^* (x_2) : \boldsymbol{\lambda}^* (x_2) = \mathbf{0}$$
$$H_0^* (x_3) : \boldsymbol{\lambda}^* (x_3) = \mathbf{0}$$
$$H_0^* (x_1 + 2x_2) : \boldsymbol{\lambda}^* (x_1 + 2x_2) = \mathbf{0}$$

com

$$\boldsymbol{\lambda}^* (x_1) = (\mathbf{A}^* (x_1))' \boldsymbol{\mu}^\circ$$
$$\boldsymbol{\lambda}^* (x_2) = (\mathbf{A}^* (x_2))' \boldsymbol{\mu}^\circ$$
$$\boldsymbol{\lambda}^* (x_3) = (\mathbf{A}^* (x_3))' \boldsymbol{\mu}^\circ$$
$$\boldsymbol{\lambda}^* (x_1 + 2x_2) = (\mathbf{A}^* (x_1 + 2x_2))' \boldsymbol{\mu}^\circ$$

$\boldsymbol{\mu}^{\circ} = [\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 \, ... \, \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9]'$ e as matrizes $\mathbf{A}^*(x_1)$, $\mathbf{A}^*(x_2)$, $\mathbf{A}^*(x_3)$ e $\mathbf{A}^*(x_1 + 2x_2)$ dadas por (4.39)-(4.40) testa-se a ausência dos três efeitos principais e das interacções de ordem 1 associadas às aplicações $x_1 + x_2$ e $x_1 + 2x_2$ em combinações lineares dos coeficientes das regressões. As hipóteses anteriores são equivalentes a

$$\begin{cases} H_0(x_1) : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_6 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_8 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_4 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_3 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_5 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_7 \\ H_0(x_2) : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_4 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_7 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_5 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_8 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_3 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_6 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 \\ H_0(x_1 + x_2) : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_4 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_5 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_6 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_7 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_8 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 \\ H_0(x_1 + 2x_2) : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_5 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_9 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_6 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_7 = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_3 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_4 + \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}_8. \end{cases}$$

5.3 Teste simultâneo à igualdade de valores médios e esfericidade da matriz de covariância num *DRM* equilibrado

Resultados desenvolvidos em [3] que tiveram como ponto de partida resultados enunciados em [4] permitem considerar extensões interessantes no estudo dos $DRM's$. Mostra-se nesta secção que o teste simultâneo à igualdade de valores médios e esfericidade da matriz de covariância,

$$H_0 : \mu_1 = ... = \mu_{p^N} \quad \Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}_{p^N} \tag{5.34}$$

aplica-se a um DRM associado a um factorial, equilibrado. Incluem-se alguns conceitos e resultados necessários nesta secção.

Seja um DRM associado a um factorial p^N (ver secção 5.2.1) equilibrado, ou seja, as matrizes para as diferentes regressões lineares são iguais $\mathbf{X}_1 = ... = \mathbf{X}_{p^N} = \mathbf{X}$. Seja a matriz

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1p^N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2p^N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{np^N} \end{bmatrix}_{n \times p^N}$$

onde Y_{ij} representa a i-ésima observação para o tratamento j. Cada coluna da matriz Y corresponde a cada um dos p^N tratamentos

$$\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} Y_{1j} \\ \vdots \\ Y_{nj} \end{bmatrix}, \; j = 1, ..., p^N$$

e cada linha corresponde a um dos n elementos da amostra aleatória

$$\mathbf{Y}_i^* = \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ \vdots \\ Y_{ip^N} \end{bmatrix}, \; i = 1, ..., n.$$

Continuando a assumir que $car\,(\mathbf{X}) = k < n$, (5.18), (5.19),tem-se que,

$$\begin{cases} Y_{ij} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}_j, \sigma^2\right) \\ Y_{ij} \; independentes \end{cases}$$

para todo $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., p^N$. Assumindo também que

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{1}_n\mu_1 \; ... \; \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_{p^N} = \mathbf{1}_n\mu_{p^N} \tag{5.35}$$

é possível testar as hipóteses (5.34). De acordo com [3], para uma amostra de dimensão n, a distribuição quase-exacta da estatística de razão de verosimilhanças para a $\frac{2}{n}-$ésima potência dada por

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{A}|}{\left(tr\left(\frac{1}{p^N}\mathbf{A}_0\right)\right)^{p^N}}$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{A} = Y\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\right)Y \\ \mathbf{A}_0 = \left(Y - \frac{1}{n}\hat{\boldsymbol{\mu}}\right)'\left(Y - \frac{1}{n}\hat{\boldsymbol{\mu}}\right) \\ \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{p^N}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'\bar{\mathbf{Y}} \end{cases}$$

é uma mistura de $m+1$ GIG se $r \in \mathbb{N}$ e é uma mistura de $m+1$ GNIG se $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, de profundidade $p^N + \lfloor \frac{p^N-1}{2} \rfloor$, com parâmetros de forma dados por (84) em [3] e taxas dados por (85) na mesma referência.

Exemplo 25. *Para ilustrar a exposição feita nesta secção considere-se que uma experiência é coduzida ao longo de várias semanas registando-se a altura dos tomateiros para cada uma das combinações de níveis dos factores cultivar (Factor A) e e estufa (Factor B). Considerar que são selecionados três tipos distintos de cultivares (C_1,C_2 e C_3) e três tipos distintos de estufa (E_1, E_2 e E_3). Testar as hipóteses (5.34) assumindo (5.35) significa que se testa se o factor estufa, por exemplo, tem influência no crescimento dos tomateiros admitindo que o factor cultivar não tem influência.*

6. CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO

Esta tese foi dedicada ao desenvolvimento dos $DRM's$ associados aos factoriais de base prima que, devido às possibilidades de confundimento e fraccionamento, permitem controlar a dimensão das experiências. Combinando o Modelo-$\mathbf{L}$ com o factorial de base prima enquadrado na classe dos modelos lineares estritamente associados a $AJC's$ mostrou-se que é possível extender o estudo, tanto do factorial, como do DRM associado a um factorial, ao caso não equilibrado. Através desta combinação e assumindo a normalidade dos erros aleatórios obtiveram-se *UMVUE's*, para os parâmetros dos referidos modelos.

Do estudo realizado ficam algumas questões por abordar e que serão interessantes considerar. Do ponto de vista teórico será interessante substituir o factorial de base prima de efeitos fixos por um modelo linear de efeitos mistos com *Orthogonal Block Structure (OBS)* (ver [39]), ou seja, por um modelo linear

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \sum_{j=m+1}^{w} \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}$$

onde $\boldsymbol{\beta}_1, ..., \boldsymbol{\beta}_m$ são vectores de parâmetros, $\boldsymbol{\beta}_{m+1}, ..., \boldsymbol{\beta}_w, \boldsymbol{\varepsilon}$ são vectores aleatórios independentes com vectores médios nulos, matrizes de variâncias-covariâncias $\sigma^2 \mathbf{I}_{g_{m+1}}, ..., \sigma^2 \mathbf{I}_{g_w}, \sigma^2 \mathbf{I}_n$, respectivamente e $g_j = car\left(\mathbf{X}_j\right), j = 1, ..., w$ tal que,

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbb{V}(\mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^{w} \gamma_j \mathbf{Q}_j, \quad \gamma_j \in \mathbb{R}^+ \\ \sum_{j=1}^{w} \mathbf{Q}_j = \mathbf{I}_n \end{cases}$$

onde $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_w$ constituem uma $FMPOMO$. Se a MPO sobre o subespaço linear que contém o vector médio $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ comutar com cada matriz $\mathbf{Q}_j$ diz-se que o modelo tem *Commutative Orthogonal Block Structure (COBS)*, (ver [2], [13]). Desta forma é possível extender o estudo realizado a uma gama mais vasta de modelos permitindo considerar efeitos mistos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Anderson T. W., (2003) *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 3rd. Ed.* John Wiley & Sons.

[2] Carvalho, F. P., João, M. T., & Oliveira, M. M. (2009). Estimation in models with commutative orthogonal block structure. *Journal of Statistical Theory and Practice, 3(2), 523-533.*

[3] Coelho, C. A., Marques, F.J., & Oliveira, S. (2016). Near-Exact Distributions for Likelihood Ratio Statistics Used in the Simultaneous Test of Conditions on Mean Vectors and Patterns of Covariance Matrices. *Mathematical Problems in Engineering.* Volume 2016, Article ID 8975902, 25 pages.

[4] Coelho, C. A., Marques, F.J., & Oliveira, S. (2013).The exact distribution of the likelihood ratio test statistic used to test simultaneously the equality of means and circularity of the covariance matrix. *AIP Conference Proceedings* - ICNAAM - 11th International Conference of Numerical Analysis and Apllied Mathematics, Rhodes.

[5] Coelho, C. A. (2004). The generalized near-integer Gamma distribution: a basis for near-exact approximations to the distribution of statistics which are the product of an odd number of independent Beta random variables. *Journal of Multivariate Analysis*, 89(2), 191-218.

[6] Coelho, C. A. (1998). The generalized integer Gamma distribution - A basis for distributions in multivariate statistics. *Journal of Multivariate Analysis*, 64(1), 86-102.

[7] Covas R., Mexia J.T., Zmyślony R. (2010) Lattices of Jordan Algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, 432(10):2679-2690.

[8] Covas, R. (2007). *Orthogonal mixed models and commutative Jordan algebras* (Doctoral dissertation, PhD Thesis, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa).

[9] Domingues L. F. (1997) *Delineamentos regressionais de base 2.* Dissertação de Mestrado em Estatística e Optimização. Faculdade Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

[10] Ferreira S., Ferreira D., Moreira E., Mexia J.T. (2010). Exact estimators for normal linear mixed models. *Far East Journal of Theorethical Statistics*, 31 (1):33-48.

[11] Ferreira S., Ferreira D., Moreira E., Mexia J.T. (2009). Inference for L orthogonal models. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 12(6):815-824.

[12] Ferreira D. (1996). *Delineamentos regressionais múltiplos com planos completos como delineamento base.* Tese de Licenciatura em Matemática, Ramo de Probabilidades e Estatística. Universidade de Évora.

[13] Fonseca, M., Mexia, J. T., & Zmyslony, R. (2008). Inference in normal models with commutative orthogonal block structure. *Acta et Commentationes Universitatis Tartunesis de Mathematica, 12, 3-16.*

[14] Fonseca M., Mexia J., Zmyślony R. (2006). Binary operations on Jordan algebras and orthogonal normal models. *Linear Algebra and Its Applications*, 417(1):75-86.

[15] Jesus V., Mexia J.T., Fonseca M., Zmyślony R. (2009) Binary Operations and Canonical Forms for Factorial and Related Models. *Linear Algebra and Its Applications*, 430(10):2781-2797.

[16] Jesus V., Mexia J.T., Oliveira S. (2009) Binary Operations on Prime Basis Factorials. *Biometrical Letters*, 46(1):1-14.

[17] Jesus V., (2008) *Jordan algebras and crossing of factorial and fractional replicates.* (Doctoral dissertation, PhD Thesis, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa).

[18] Jordan P., von Neumann J., Wigner E.P. (1934). On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Annalls of Mathematical*, 35:29-64.

[19] Kshirsagar A. K., (1972) *Multivariate Analysis.* Marcel Dekker. New York.

[20] Lehmann E.L., Casella G. (1998). *Theory of Point Estimation. 2nd. Ed.* Springer Texts in Statistics. New York: Springer.

[21] Lehmann E.L.(1997). *Testing statistical hypothesis Reprint of the 2nd. Ed. by Wiley 1986.* New York: Springer.

[22] Malley J.D. (1994). *Statistical Applications of Jordan algebras.* New York: Springer-Verlag.

[23] Mexia J.T. (1995). *Introdução à Inferência Estatística Linear.* Edições Lusófonas.

[24] Mexia J.T. (1990). Best linear unbiased estimates, duality of F tests and the Scheffé multiple comparison method in the presence of controlled heterocedasticity, *Computational Statistics & Data Analysis* 10(3):271-281.

[25] Mexia J.T. (1988). *Standardized Orthogonal Matrices and the Decomposition of the sum of Squares for Treatments.* Trabalhos de Investigação nº2. Departamento de Matemática, Faculdade e Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

[26] Mexia J.T. (1987). *Multi-Treatment Regression Designs.* Trabalhos de Investigação nº1. Departamento de Matemática, Faculdade e Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

[27] Michalski A., Zmyślony R. (1996). Testing Hypothesis for Variance Components in Mixed Linear Models. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics,* 27(3-4):297-310.

[28] Michalski A., Zmyślony R. (1999). Testing Hypothesis for Linear Functions of Parameters in Mixed Linear Models. *Tatra Mountain Mathematical Publications,* 17:103-110.

[29] Montgomery, D. C. (1997). *Design and analysis of experiments 5th. Ed.,* John Wiley & Sons.

[30] Moreira E., Mexia, J.T., Zmyślony R. (2009) L models and multiple regressions designs. *Statistical Papers* 50:869-885.

[31] Moreira E.E. (2008) *Famílias estruturadas de modelos com modelo base ortogonal.* Dissertação de Doutoramento em Matemática com especialização em Estatística. Faculdade Ciências e Tecnologia. Universidade Nova de Lisboa.

[32] Moreira E.E., Mexia J.T. (2007) Multiple regression models with cross nested orthogonal base model. *Proceedings of the 56th Sessions of the ISI 2007-International Statistical Institute, Lisboa.*

[33] Moreira E.E., Ribeiro A.B.,Mateus E.P., Mexia J.T., Ottosen L.M. (2005a). Regresional modeling of electrodialytic removal of Cu, Cr and As from CCA timber waste: application to sawdust. *Wood Science and Technology* 39(4):291-309.

[34] Moreira E.E., Ribeiro A.B.,Mateus E.P., Mexia J.T., Ottosen L.M. (2005b) Regrresional modeling of electrodialytic removal of Cu, Cr and As from CCA timber waste: application to wood chips. *Biometrical letters* 42(1):11-25.

[35] Moreira E.E (2004) *Tratamento regressional da remoção de metais pesados de resíduos de madeira.* Dissertação de Mestrado em Estatística e Optimização. Faculdade Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

[36] Morris, M. (2010). *Design of experiments: An introduction based on linear models.* CRC Press.

[37] Muirhead R. J., (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory.* John Wiley & Sons. New York.

[38] Mukerjee, R., Wu, C. J. (2007). *A Modern Theory of Factorial Design.* Springer Science Business Media.

[39] Nelder, J. A. (1965). The analysis of randomized experiments with orthogonal block structure. I. Block structure and the null analysis of variance. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (Vol. 283, No. 1393, pp. 147-162). The Royal Society.*

[40] Oliveira S., Mexia J.T. (2006) Delineamentos regressionais múltiplos com base factorial prima. *Actas do XIV Congresso Anual da SPE*, 573-584.

[41] Oliveira S. (2005) *Delineamentos regressionais múltiplos com base factorial prima.* Dissertação de Mestrado em Estatística e Optimização. Faculdade Ciências e Tecnologia. Universidade Nova de Lisboa.

[42] Rao C. R., Rao M. B. (1998). *Matrix algebra and its applications to statistics and econometrics.* Singapore. World Scientific Publishing.

[43] Saraiva S. (1996) *Delineamentos regressionais múltiplos associados a quadrados latinos e blocos casualizados.* Tese de Licenciatura em Matemática, Ramo de Probabilidades e Estatística. Universidade de Évora.

[44] Scheffé H. (1959). *The Analysis of Variance, Reprint of the 1959.* Wiley Classics Library. New York: Wiley.

[45] Schott J.R. (1997). *Matrix analysis for statistics.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: Wiley.

[46] Seely J. (1970a). Linear Spaces and Unbiased Estimation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(5):1725-1734.

[47] Seely J. (1970). Linear Spaces and Unbiased Estimation. An Application to the Mixed Linear Model. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(5):1735-1748.

[48] Seely J. (1971). Quadratic Subspaces and Completeness. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(2):710-721.

[49] Seely J. (1972). Completeness for a family of multivariate normal distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43:1644-1647.

[50] Seely J., (1977) Minimal sufficient statistics and completeness for multivariate normal families, *Sankyã*, 39(2):170-185.

[51] Silvey S.D. (1975). *Statistical Inference. Reprinted with corrections.* Monographs on Applied on Probability and Statistics. London: Chapman and Hall.

[52] Zmyślony R. (1980). Completeness for a family of normal distributions. *Banach Center Publications,* 6(1), 355-357.

[53] Zmyślony R. (1976). *On estimation of parameters in linear models, Applicationes Mathematicae XV*, (3), 271-276.

APÊNDICE

A. RESULTADOS ALGÉBRICOS

Este anexo apresenta uma breve exposição de conceitos de Álgebra Linear e Teoria das Matrizes necessários para melhor compreender a abordagem associada à formalização dos modelos que são objecto desta dissertação. Embora sejam resultados bastante conhecidos e estudados considerou-se que esta exposição não ficaria completa sem estes conteúdos e por isso importante a sua inclusão. Os resultados apresentados não são demonstrados e podem ser consultados por exemplo em [42] ou [45].

A.1 Matriz de projecção ortogonal

Seja $\mathcal{E}$ um espaço linear munido de um produto interno e $\mathcal{S}$ um subespaço linear de $\mathcal{E}$. Sejam $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$ uma base ortonormada para $\mathcal{E}$ e $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_r\},\ r < n$, uma base ortonormada para $\mathcal{S}$. Dado $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$, tem-se que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

ou,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{A}_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

considerando $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2]$ e $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1'\ \boldsymbol{\alpha}_2']'$, onde $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_r]$, $\mathbf{A}_2 = [\mathbf{a}_{r+1}, ..., \mathbf{a}_n]$, $\boldsymbol{\alpha}_1 = [\alpha_1 ... \alpha_r]'$ e $\boldsymbol{\alpha}_2 = [\alpha_{r+1} ... \alpha_n]'$, pelo que, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1\boldsymbol{\alpha}_1$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_2\boldsymbol{\alpha}_2$. Devido à ortonormalidade dos vectores $\mathbf{a}_i$ tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_r \\ \mathbf{A}_2'\mathbf{A}_2 = \mathbf{I}_{n-r} \\ \mathbf{A}_1'\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{A}_2'\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \end{cases}$$

pelo que,

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^{'}\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^{'}\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^{'}[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix} = \mathbf{A}_1\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{x}_1.$$

Definição 29. *O vector* $\mathbf{x}_1$ *definido anteriormente é designado por projecção ortogonal de* $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ *sobre* $\mathcal{S}$.

Assim vem o resultado seguinte.

Teorema 39. *Seja* $\mathcal{S}$ *um subespaço de* $\mathcal{E}$ *e* $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_r]$ *uma matriz cujas colunas constituem uma base ortonormada de* $\mathcal{S}$. *A projecção ortogonal de* $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ *sobre* $\mathcal{S}$ *é dada por*

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1'\mathbf{x}.$$

Demonstração. Ver [45]. □

Definição 30. *À matriz* $\mathbf{Q}_{\mathcal{S}} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1'$ *chama-se matriz de projecção ortogonal sobre* $\mathcal{S}$.

Num espaço linear uma base ortonormada não é única, no entanto, a matriz de projecção ortogonal é única.

Teorema 40. *Supondo que* $\mathbf{A}_1$ *e* $\mathbf{B}_1$ *são matrizes cujas colunas formam bases ortonormadas para um subespaço linear* $\mathcal{S}$, *de dimensão* r, *então* $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1' = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1'$.

Demonstração. Ver [45]. □

Obviamente que

$$\begin{cases} R\left(\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}\right) = \mathcal{S} \\ N\left(\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}\right) = \mathcal{S}^{\perp} \end{cases}$$

onde $R\left(\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}\right)$ representa o espaço imagem de $\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}$, $N\left(\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}\right)$ o espaço nulidade de $\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}$ e $\mathcal{S}^{\perp}$ o complemento ortogonal de $\mathcal{S}$. A matriz de projecção ortogonal sobre $\mathcal{S}^{\perp}$ é $\mathbf{Q}_{\mathcal{S}^{\perp}} = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_2'$ e

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{Q}_{\mathcal{S}} + \mathbf{Q}_{\mathcal{S}^{\perp}}.$$

Facilmente verifica-se que se $\mathbf{Q}_{\mathcal{S}} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1'$ é a matriz de projecção ortogonal sobre $\mathcal{S}$ então é simétrica

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}' = \mathbf{Q}_{\mathcal{S}}$$

e idempotente

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}\mathbf{Q}_{\mathcal{S}} = \mathbf{Q}_{\mathcal{S}}$$

pois $\mathbf{A}_1'\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_r$. O recíproco também é verdadeiro.

Teorema 41. *Seja* $\mathbf{P}$ *uma matriz simétrica e idempotente com* $car(\mathbf{P}) = r$. *Então existe um espaço linear de dimensão* r, *tal que,* $\mathbf{P}$ *é a sua matriz de projecção ortogonal.*

Demonstração. Ver [45]. □

Teorema 42. *Se* $\mathbf{Q}_{\mathcal{S}}\mathbf{x}$ *é a projecção ortogonal de* $\mathbf{x}$ *sobre* $\mathcal{S}$ *tem-se que*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{Q}_{\mathcal{S}}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{A.1}$$

para todo o $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Ver [45]. □

Teorema 43. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $\mathbf{Q}$ *é uma matriz de projecção ortogonal,*

2. $\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}$ *é uma matriz de projecção ortogonal,*

3. $R(\mathbf{Q}) = N(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})$,

4. $R(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}) = N(\mathbf{Q})$,

5. $R(\mathbf{Q}) \perp R(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})$,

6. $N(\mathbf{Q}) \perp N(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q})$.

Demonstração. Ver [42]. □

Teorema 44. *Sejam* $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_k$ *matrizes de projecção ortogonais, tais que,* $\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_j = 0$*, para* $i \neq j$*, com* $i, j = 1, ..., k$*. Então*

1. $\mathbf{Q} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbf{Q}_i$ *é uma matriz de projecção ortogonal,*

2. $R(\mathbf{Q}_i) \cap R(\mathbf{Q}_j) = \{\mathbf{0}\}$*, para* $i \neq j$*,*

3. $R(\mathbf{Q}) = \boxplus_{i=1}^{k} R(\mathbf{Q}_i)$.

Demonstração. Ver [42]. □

Teorema 45. *Sejam* $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$ *subespaços de um mesmo espaço linear* $\mathcal{E}$ *mutuamente ortogonais e* $\mathcal{S} = \boxplus_{i=1}^{k} \mathcal{S}_i$*. Seja* $\mathbf{Q}_i$ *a matriz de projecção ortogonal sobre* $\mathcal{S}_i$*,* $i = 1, ..., k$*. Então* $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{Q}_i$ *é uma matriz projecção ortogonal em* $\mathcal{S}$*.*

Demonstração. Ver [42]. □

Teorema 46. *Seja $\mathcal{S}$ um subespaço linear de $\mathcal{E}$ de dimensão r. Seja $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_r]$ uma matriz, do tipo $n \times r$, cujas colunas formam uma base para $\mathcal{S}$. Então a matriz de projecção ortogonal sobre $\mathcal{S}$ é dada por*

$$\mathbf{Q}_S = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'.$$

Demonstração. Ver [45]. □

A.2 Produto de Kronecker

Além do produto usual de matrizes utiliza-se também o produto de *kronecker* que se representa por $\otimes$.

Definição 31. *Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes do tipo $m \times n$ e $p \times q$, respectivamente. O produto de kronecker de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é a matriz de ordem $mp \times nq$ definida por*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

Esta operação está definida quaisquer que sejam as dimensões das duas matrizes, ao contrário do que acontece com a multiplicação usual de matrizes. À semelhança da multiplicação usual de matrizes o produto de Kronceker também não é comutativo. Algumas propriedades do produto de Kronecker, que se verificam facilmente a partir da definição anterior, são resumidas de seguida.

Teorema 47. *Sejam as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ e os vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, quaisquer. Então*

1. $\alpha \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \alpha = \alpha\mathbf{A}$, *para qualquer escalar* α,

2. $(\alpha\mathbf{A}) \otimes (\beta\mathbf{B}) = \alpha\beta(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$, *para quaisquer escalares* α *e* β,

3. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$,

4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$, *se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *forem do mesmo tipo,*

5. $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})$, *se* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *forem do mesmo tipo,*

6. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}'$,

7. $\mathbf{a}\mathbf{b}' = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}' = \mathbf{b}' \otimes \mathbf{a}$.

Demonstração. Ver [45]. □

Considerando as propriedades apresentadas no teorema anterior verifica-se que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{A}_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{k} b_j \mathbf{B}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_i b_j \left(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{B}_j\right)$$

se as matrizes $\mathbf{A}_i$ forem do mesmo tipo e as matrizes $\mathbf{B}_j$ forem do mesmo tipo.

Uma propriedade que relaciona o produto de kronecker e o produto usual de matrizes é dada por

Teorema 48. *Sejam* $\mathbf{A},\ \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *matrizes do tipo* $m \times h,\ p \times k,\ h \times n$ *e* $k \times q$, *respectivamente. Então*

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}.$$

Demonstração. Ver [45]. □

Teorema 49. *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrizes de ordem* m *e* p, *respectivamente. Então*

$$tr\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right) = tr(\mathbf{A}) tr(\mathbf{B})$$

Demonstração. Ver [45]. □

Teorema 50. *Sejam* $\mathbf{A}$ *uma matriz do tipo* $m \times n$ *e* $\mathbf{B}$ *uma matriz do tipo* $p \times q$. *Então*

1. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$ *se* $m = n,\ p = q,\ \mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *forem matrizes regulares,*

2. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{+} = \mathbf{A}^{+} \otimes \mathbf{B}^{+}$.

Demonstração. Ver [45]. □

Teorema 51. *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *de ordem* n *e* m, *respectivamente. Sejam* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *os valores próprios de* $\mathbf{A}$ *e* $\beta_1, ..., \beta_m$ *os valores próprios de* $\mathbf{B}$. *Então os* nm *valores próprios de* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *são* $\lambda_i \beta_j,\ i = 1, ..., n$ *e* $j = 1, ..., m$.

Demonstração. Ver [45]. □

Utilizando o facto do determinante de uma matriz quadrada ser igual ao produto dos seus valores próprios obtém-se a propriedade seguinte.

Teorema 52. *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são matrizes de ordem* m *e* p, *respectivamente. Então*

$$|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^p |\mathbf{B}|^m.$$

Demonstração. Ver [45]. □

Teorema 53. *Sejam* $\mathbf{A}$ *uma matriz do tipo* $m \times n$ *e* $\mathbf{B}$ *uma matriz do tipo* $p \times q$. *Verifica-se que*

1. $car\,(\mathbf{A}) = car\,(\mathbf{A}') = car\,(\mathbf{A}\mathbf{A}') = car\,(\mathbf{A}'\mathbf{A})\,,$

2. $car\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = car\,(\mathbf{A})\,car\,(\mathbf{B})\,.$

Demonstração. Ver [45]. □

Considere-se $\mathbf{1}_m$ e $\mathbf{1}_n$ vectores de 1's com m e n componentes, respectivamente. Atendendo ao exposto, verifica-se facilmente, que

$$\begin{cases} \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_{mn} \\ \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_{mn} \\ \mathbf{J}_m \otimes \mathbf{J}_n = \mathbf{J}_{mn} \end{cases}$$

onde $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n'$, $\mathbf{J}_m = \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m'$ e $\mathbf{J}_{mn} = \mathbf{1}_{mn} \mathbf{1}_{mn}'$. Sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes simétricas tem-se que

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}' = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}.$$

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem matrizes idempotentes verifica-se que

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{AA} \otimes \mathbf{BB} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}.$$

pelo que,

Teorema 54. *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *de ordem* n *e* p, *respectivamente.*

1. *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são matrizes simétricas então* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *é uma matriz simétrica,*

2. *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são matrizes idempotentes então* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *é uma matriz idempotente.*

Quando $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ são matrizes ortogonais

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}') = \mathbf{AA}' \otimes \mathbf{BB}' = \mathbf{I}$$

e assim

Teorema 55. *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrizes ortogonais quaisquer. Então* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *é uma matriz ortogonal.*

Atendendo aos teoremas 54 e 55 verifica-se que

Teorema 56. *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrizes de projecção ortogonal. Então* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *é uma matriz de projecção ortogonal.*

Sejam $\mathbf{D}(a_1...a_n)$ e $\mathbf{D}(b_1...b_n)$ matrizes diagonais. Por A.2

$$\mathbf{D}(a_1...a_n) \otimes \mathbf{D}(b_1...b_n) = \mathbf{D}((a_1...a_n) \otimes (b_1...b_n)) .$$

A.3 Inversa generalizada de Moore-Penrose

Definição 32. *(Penrose,1955) Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz do tipo* $m \times n$. *A inversa de Moore-Penrose da matriz* $\mathbf{A}$ *é a matriz, do tipo* $n \times m$, *que se representa por* $\mathbf{A}^+$ *e satisfaz as seguintes condições*

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,

2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,

3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)' = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$,

4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})' = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

Teorema 57. *A matriz* $\mathbf{A}^+$ *que satisfaz as condições anteriores é única.*

Demonstração. Ver [45]. □

A definição seguinte alternativa e equivalente à anterior foi dada por *Moore* (1935). Utiliza o conceito de matriz de projecção ortogonal que é útil em vários contextos.

Definição 33. *(Moore, 1935) Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz do tipo* $m \times n$. *Então a inversa de Moore-Penrose da matriz* $\mathbf{A}$ *é a matriz única* $\mathbf{A}^+$, *do tipo* $n \times m$, *que satisfaz as condições seguintes*

1. $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{Q}_{R(\mathbf{A})}$,

2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{Q}_{R(\mathbf{A}^+)}$

onde $\mathbf{Q}_{R(\mathbf{A})}$ *e* $\mathbf{Q}_{R(\mathbf{A}^+)}$ *são as matrizes de projecção ortogonal sobre os subespaços* $R(\mathbf{A})$ *e* $R(\mathbf{A}^+)$, *respectivamente.*

Teorema 58. *As definições 32 e 33 são equivalentes.*

Demonstração. Ver [45]. □

Apresentam-se de seguida algumas propriedades que a inversa de *Moore-Penrose* de uma matriz verifica.

Teorema 59. *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz do tipo* $m \times n$. *Então*

1. $(\alpha\mathbf{A})^+ = \alpha^{-1}\mathbf{A}^+$, *com* $\alpha \neq 0$ *um escalar,*

2. $(\mathbf{A}')^+ = (\mathbf{A}^+)'$,

3. $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$,

4. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$, *se* $\mathbf{A}$ *for uma matriz quadrada e não singular,*

5. $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^+ = \mathbf{A}^+(\mathbf{A}^+)'$ *e* $(\mathbf{AA}')^+ = (\mathbf{A}^+)'\mathbf{A}^+$,

6. $(\mathbf{AA}^+)^+ = \mathbf{AA}^+$ *e* $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$,

7. $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^+\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^+$,

8. $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$ *e* $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, *se* $car(A) = n$,

9. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-1}$ *e* $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{I}_m$, *se* $car(A) = m$,

10. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}'$, *se* $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$,

11. $car(\mathbf{A}) = car(\mathbf{A}^+) = car(\mathbf{A}\mathbf{A}^+) = car(\mathbf{A}^+\mathbf{A})$.

Demonstração. Ver [45]. □

Teorema 60. *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz simétrica. Então*

1. $\mathbf{A}^+$ *também é simétrica,*
2. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$,
3. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$, *se* $\mathbf{A}$ *é idempotente.*

Demonstração. Ver [45]. □

Atendendo à definição 33.(1) e ao Teorema 59.(7)

$$\mathbf{Q}_{R(\mathbf{A})} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}'\mathbf{A}\right)^+\mathbf{A}'.$$

Em particular quando $car(\mathbf{A}) = n$

$$\mathbf{Q}_{R(\mathbf{A})} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}'\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}'.$$

A.4 Matriz ortogonal estandardizada

Definição 34. *Seja* $\mathbf{P}$ *uma matriz, de ordem* p, *ortogonal. A matriz* $\mathbf{P}$ *diz-se ortogonal estandardizada se a primeira coluna é igual a* $\frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{1}_p$.

Uma matriz ortogonal estandardizada pode ser escrita como

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{1}_p & \mathbf{K}_p \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

em que $\mathbf{K}_p$ é uma matriz, do tipo $p \times (p-1)$, que não inclui a primeira coluna da matriz $\mathbf{P}$. Como $\mathbf{P}$ é ortogonal, $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I}_p$ então verifica-se que

$$\mathbf{K}_p'\mathbf{K}_p = \mathbf{I}_{p-1} \tag{A.4}$$

$$\mathbf{1}_p'\mathbf{K}_p = \mathbf{0}_{1\times(p-1)} \tag{A.5}$$

$$\mathbf{K}_p\mathbf{K}_p' = \mathbf{I}_p - \frac{1}{p}\mathbf{J}_p. \tag{A.6}$$

De (A.5) pode-se concluir que a soma dos elementos de cada coluna da matriz $\mathbf{K}_p$ é igual a zero.

Definição 35. *Uma matriz em que a soma dos elementos em qualquer uma das suas colunas é igual a zero diz-se uma matriz de contrastes.*

A matriz $\mathbf{K}_p$ é uma matriz de contrastes.

Para calcular uma matriz ortogonal estandardizada pode usar-se o conhecido método de *ortonormalização de Gram-Schmidt*.

Exemplo 26. *Uma possibilidade para obter um matriz ortogonal estandardizada de ordem n é diagonalizar a matriz $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'$. Por exemplo,*

- *Uma diagonalizadora ortogonal estandardizada de $\mathbf{J}_2 = \mathbf{1}_2\mathbf{1}_2'$ é*

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

- *Uma diagonalizadora ortogonal estandardizada de $\mathbf{J}_3 = \mathbf{1}_3\mathbf{1}_3'$ é*

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

- *Uma diagonalizadora ortogonal estandardizada de $\mathbf{J}_4 = \mathbf{1}_4\mathbf{1}_4'$ é*

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{4}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{4}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}.$$

B. VECTORES ALEATÓRIOS, DISTRIBUIÇÃO NORMAL MULTIVARIADA

B.1 Vector médio, matriz de covariância e matriz de covariância cruzada

Quando se trabalha com várias variáveis aleatórias é usual escrevê-las como vectores ou matrizes. Escreve-se $\mathbf{X} = [\ X_1 \ \cdots \ X_n\ ]'$ para representar o vector aleatório, $n \times 1$ e $\mathbf{Z} = [Z_{jk}]$, uma matriz aleatória do tipo $n \times p$, cujas componentes são variáveis aleatórias. Admite-se que existem os valores esperados, as variâncias e as covariâncias que são indicadadas nas definições e nas propriedades que se seguem.

Definição 36. *O valor esperado de uma matriz aleatória* $\mathbf{Z}$ *é*

$$\mathbb{E}[\mathbf{Z}] = [\mathbb{E}[Z_{jk}]], \qquad j = 1, ..., n, \quad k = 1, ..., p.$$

Em particular se $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$ *o valor esperado*

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{pmatrix}$$

é a média ou vector médio de $\mathbf{X}$.

Geralmente representa-se um vector médio por $\boldsymbol{\mu}$, quando for necessário por $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$. Se $\mathbf{Z} = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'$ o seu valor esperado é a covariância ou a matriz de variâncias-covariâncias de $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{V} = \mathbb{V}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\right] = [\mathbb{E}[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)]]\,.$$

Se $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})(\mathbf{W}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{W}})'$ onde $\mathbf{W}$ é um vector aleatório, $k \times 1$, com vector médio $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{W}}$, o seu valor esperado é a matriz

$$\mathbb{V}(\mathbf{X},\mathbf{W}) = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})(\mathbf{W}-\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{W}})'\right] = [\mathbb{E}[(X_i-\mu_{Xi})(W_j-\mu_{Wj})]]$$

que se designa por matriz de covariância cruzada de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{W}$. Note-se que o i-ésimo elemento principal da matriz $\mathbf{V}$, $\sigma_i^2 = \mathbb{E}\left[(X_i-\mu_i)^2\right]$, é a variância de X_i e o ij-ésimo elemento desta matriz, $cov(X_i,X_j) = \mathbb{E}[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)]$, é a covariância entre X_i e X_j. Como $Cov(X_i,X_j) = Cov(X_j,X_i)\,, i \neq j$ obviamente a matriz $\mathbf{V}$ é simétrica. Atendendo a que $(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})' = \mathbf{X}\mathbf{X}' - \boldsymbol{\mu}\mathbf{X}' - \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'$ tem-se

$$\mathbb{V}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}'] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'.$$

Teorema 61. *Sejam* $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$, *matrizes constantes, do tipo* $m \times n$, $p \times k$ *e* $m \times k$, *respectivamente e* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *vectores constantes,* $m \times 1$, $p \times 1$, *respectivamente. Sejam* $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{W}$ *vectores aleatórios,* $n \times 1$, $\mathbf{Z}$ *a matriz aleatória do tipo* $n \times p$ *e* α *um escalar. Então*

1. $\mathbb{E}[\mathbf{X}+\mathbf{Y}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbb{E}[\mathbf{Y}]\,,$

2. $\mathbb{E}[\alpha\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{a}] = \alpha\mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{a},$

3. $\mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{B}+\mathbf{C}] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{Z}]\,\mathbf{B} + \mathbf{C},$

4. $\mathbb{V}[\ \mathbf{X}]$ *é uma matriz semi-definida positiva,*

5. $\mathbb{V}[\alpha\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{a}] = \alpha^2\mathbf{A}\mathbb{V}[\mathbf{X}]\,\mathbf{A}',$

6. $\mathbb{V}(\mathbf{X},\mathbf{W}) = \mathbb{V}(\mathbf{W},\mathbf{X})'\,,$

7. $\mathbb{V}[\mathbf{X}+\mathbf{Y}] = \mathbb{V}[\mathbf{X}] + \mathbb{V}[\mathbf{Y}] + \mathbb{V}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) + \mathbb{V}(\mathbf{Y},\mathbf{X})$,

8. *Se* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *são independentes então* $\mathbb{V}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$,

9. $\mathbb{V}(\alpha\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{a},\beta\mathbf{B}\mathbf{W}+\mathbf{b}) = \alpha\beta\mathbf{A}\mathbb{V}(\mathbf{X},\mathbf{W})\,\mathbf{B}'$,

10. $\mathbb{V}(\mathbf{X}+\mathbf{Y},\mathbf{W}) = \mathbb{V}(\mathbf{X},\mathbf{W}) + \mathbb{V}(\mathbf{Y},\mathbf{W})$.

Demonstração. Ver [1], [19] ou [37]. □

B.2 Distribuição Normal multivariada

Diz-se que o vector aleatório $\mathbf{X}$ tem distribuição normal $n-$multivariada não singular se a sua densidade é

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,|\mathbf{V}|}}\; e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \tag{B.1}$$

onde $\mathbf{V}$ é uma matriz definida positiva. Simbolicamente,

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu},\mathbf{V}).$$

Enunciam-se algumas propriedades importantes relativamente à distribuição normal multivariada.

Teorema 62. *Seja* $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu},\mathbf{V})$. *Então*

1. $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$ *e* $\mathbb{V}[\mathbf{X}] = \mathbf{V}$,

2. *as distribuições marginais de* $\mathbf{X}$ *são também multinormais com vectores médios e matrizes de covariâncias dados pelos correspondentes subvectores e submatrizes de* $\boldsymbol{\mu}$ *e* $\mathbf{V}$. *Em particular, cada componente de* $\mathbf{X}$ *tem distribuição normal com média* μ_i *e variância* σ_i^2,

3. *seja* $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1' ... \mathbf{X}_r']'$, *então os subvectores* $\mathbf{X}_i$ *e* $\mathbf{X}_j$ *são independentes se e só se a submatriz de* $\mathbf{V}$ *associada às covariâncias entres as suas componentes for constituída apenas por zeros,*

4. *seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz constante, do tipo* $m \times n$, *com* $car\,(\mathbf{A}) = m \leq n$ *e* $\mathbf{a}$ *um vector constante,* $m \times 1$, *então*

$$\mathbf{AX} + \mathbf{a} \sim \mathcal{N}_m \left(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{a}\ ,\ \mathbf{AVA}' \right),$$

5. *a função geradora de momentos de* $\mathbf{X}$ *é* $M_{\mathbf{X}}(t) = \mathbb{E}\big[e^{\mathbf{t}'\mathbf{X}}\big] = e^{\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}$,

6. *a função característica de* $\mathbf{X}$ *é* $\phi_{\mathbf{X}}(t) = \mathbb{E}\big[e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}\big] = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{V}\mathbf{t}}$.

Demonstração. Ver [1], [19] ou [37]. □

No ponto 4 do Teorema 62 exige-se que $car\,(\mathbf{A}) = m \leq n$ de forma a garantir que a matriz $\mathbf{AVA}'$ seja regular. No entanto, existem situações em que a matriz $\mathbf{AVA}'$ não é regular. Assim considera-se uma definição da distribuição normal que inclui a distribuição singular.

Definição 37. *Diz-se que o vector aleatório* $\mathbf{X}$, *com* $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$ *e* $\mathbb{V}[\mathbf{X}] = \mathbf{V}$, *tem distribuição normal* n*-multivariada se existe uma transformação da forma*

$$\mathbf{X} = \mathbf{DY} + \boldsymbol{\lambda}$$

onde $\mathbf{D}$ *é uma matriz, não aleatória, com* n *linhas, o número de colunas é igual a* $car\,(\mathbf{V})$ *e* $\mathbf{Y}$ *é um vector aleatório com densidade dada por B.1.*

É evidente que se $car\,(\mathbf{V}) = n$ então pode-se considerar $\mathbf{D} = \mathbf{I}_n$ e $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ tendo-se $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Assim de acordo com esta definição pode-se escrever 4 do Teorema 62 de uma forma mais geral.

Teorema 63. *Seja* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *uma matriz constante e* $\mathbf{a}$ *um vector constante, então*

$$\mathbf{AX}+\mathbf{a}\sim\mathcal{N}_m\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}+\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{AVA}'\right).$$

Demonstração. Ver [1]. □

Esta generalização inclui os casos em que $\mathbf{X}$ pode ter distribuição não singular, singular e a matriz $\mathbf{A}$ pode ser regular ou ter $car\left(\mathbf{A}\right)<m$.

B.3 Formas quadráticas

Muitas das estatísticas que são utilizadas nesta tese têm distribuição χ^2 e distribuição $\mathcal{F}$. Geralmente, estas distribuições estão associadas a estatísticas de teste sob validade de uma hipótese nula no caso central e sob validade de uma hipótese alternativa no caso não central.

Teorema 64. *Seja* $\mathbf{X}\sim\mathcal{N}_n\left(\boldsymbol{\mu},\sigma^2\mathbf{V}\right)$ *com* $car\left(\mathbf{V}\right)=\ell\leq n$ *e* $\mathbf{b}$ *um vector constante. Então*

$$Q=\left(\mathbf{X}-\mathbf{b}\right)'\mathbf{V}^{+}\left(\mathbf{X}-\mathbf{b}\right)$$

tem distribuição do Qui-quadrado não central com ℓ *graus de liberdade e parâmetro de não centralidade* δ

$$\delta=\frac{\left(\boldsymbol{\mu}-\mathbf{b}\right)'\mathbf{V}^{+}\left(\boldsymbol{\mu}-\mathbf{b}\right)}{\sigma^2}. \tag{B.2}$$

Simbolicamente,

$$Q\sim\sigma^2\chi^2_{\ell,\delta}. \tag{B.3}$$

Demonstração. Ver [23]. □

Teorema 65. *Seja* $S\sim\chi^2_m$ *uma variável aleatória independente de* $\mathbf{X}\sim\mathcal{N}_n\left(\boldsymbol{\mu},\sigma^2\mathbf{V}\right)$ *onde* $car\left(\mathbf{V}\right)=\ell\leq n$*. Então*

$$\mathcal{F}=\frac{m}{\ell}\frac{\left(\mathbf{X}-\mathbf{b}\right)'\mathbf{V}^{+}\left(\mathbf{X}-\mathbf{b}\right)}{S}$$

tem distribuição F não central com parâmetros ℓ e m e parâmetro de não centralidade δ dado por (B.2), simbolicamente

$$\mathcal{F} \sim F_{\ell,m,\delta}.$$

Demonstração. Ver [23]. □

Em particular se $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n\left(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$ e $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ verifica-se que

$$Q = \|\mathbf{X}\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n,\delta} \tag{B.4}$$

com $\delta = \frac{\|\boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2}$ e

$$F = \frac{m}{n}\frac{\|\mathbf{X}\|^2}{S} \sim \mathcal{F}_{n,m,\delta}. \tag{B.5}$$

Em particular quando $car\left(\mathbf{V}\right) = n$, vem $\mathbf{V}^{+} = \mathbf{V}^{-1}$ e considerando $\mathbf{b} = \boldsymbol{\mu}$

$$Q_0 = \left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\right)' \mathbf{V}^{-1} \left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\right) \sim \sigma^2 \chi^2_n$$

e portanto

$$\mathcal{F}_0 = \frac{m}{n}\frac{\left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\right)' \mathbf{V}^{-1} \left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\right)}{S} \sim F_{n,m}.$$

C. ESTATÍSTICAS SUFICIENTES E COMPLETAS

Esta secção apresenta algumas definições e propriedades sobre estimação pontual, incidindo sobretudo em estatísticas suficientes e completas.

Um dos objectivos numa análise estatística é a redução da dimensão de colecções de variáveis aleatórias (amostras aleatórias), em outras variáveis, de modo a facilitar a análise estatística. Estas novas variáveis, que são função das primeiras, chamam-se estatísticas. Uma estatística usada para estimar, através de uma amostra, o valor de um parâmetro (cujo verdadeiro valor é desconhecido) diz-se um estimador. O parâmetro pode ser um escalar, um vector, ou função do parâmetro.

Seja $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ um vector aleatório definido no espaço amostral com função densidade (ou de probabilidade) pertencente à família $\mathcal{F} = \{f(\mathbf{x}|\theta), \ \theta \in \Theta\}$.

Definição 38. *Uma estatística $T = T(\mathbf{X})$ é suficiente para θ se e só se a distribuição condicional de $\mathbf{X}$ dado $T = t$ não depende de θ, para qualquer valor de t.*

Uma estatística suficiente opera uma redução dos dados sem perder informação, isto é, extrai da amostra toda a informação que esta contém sobre o pârametro θ. A definição de estatística suficiente generaliza-se ao caso em que a função densidade (ou de probabilidade) envolve mais do que um parâmetro.

Definição 39. *As estatísticas $T_1, ..., T_k$, onde $T_i = T_i(\mathbf{X})$ para $i = 1, ..., k$, são conjuntamente suficientes para $\boldsymbol{\theta}$, se e só se a distribuição condicional de $\mathbf{X}$ dados $T_1 = t_1, ..., T_k = t_k$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$.*

Uma ferramenta útil para verificar se um estimador é uma estatística suficiente é o teorema que se apresenta de seguida.

Teorema 66. *(Teorema da factorização)*
As estatísticas $T_1, ..., T_k$, são conjuntamente suficientes para $\boldsymbol{\theta}$ se e só se existem funções não negativas, g e h, tais que,

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = g(t_1, ..., t_k|\boldsymbol{\theta})\, h(\mathbf{x})$$

onde a função h não depende de $\boldsymbol{\theta}$ e g depende de $\mathbf{x}$ apenas através de $t_1, ..., t_k$.

Intuitivamente espera-se que um estimador forneça "em média"estimativas exactas, ou seja, que coincidam com o verdadeiro valor do parâmetro.

Definição 40. *Um estimador T é não enviesado (ou centrado) para $g(\theta)$ se*

$$E(T) = g(\theta)$$

qualquer que seja $\theta \in \Theta$.

Na classe dos estimadores não enviesados procura-se um que tenha a menor variância, isto é, o que produza estimativas mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro.

Definição 41. *Um estimador T de $g(\theta)$ é um estimador não enviesado com variância uniformemente mínina ou UMVUE se*

1. $E(T) = g(\theta)$

2. $V(T) \leq V(T')$, *para qualquer $\theta \in \Theta$, onde T' é um outro qualquer estimador não enviesado de $g(\theta)$.*

O teorema de Rao-Blacwell é um resultado importante e mostra que é possível obter um estimador centrado, função de estatísticas suficientes, que tem menor variância que outro qualquer estimador centrado que não seja função de estísticas suficientes.

Teorema 67. *(Rao-Blackwell) Seja $T_1, ..., T_k$ um conjunto de estatísticas conjuntamente suficientes. Seja $T' = T'(\mathbf{X})$ um estimador centrado de $g(\theta)$ e $T^* = \mathbb{E}(T'|T_1, ..., T_k)$. Então,*

1. *T^* é uma função das estatísticas $T_1, ..., T_k$,*
2. *$E(T^*) = g(\theta)$ (T^* é um estimador não enviesado para $g(\theta)$)*
3. *$\mathbb{V}(T^*) \leq \mathbb{V}(T')$, para qualquer θ e $\mathbb{V}(T^*) < \mathbb{V}(T')$ para algum θ a não ser que $\mathbb{P}(T^* = T') = 1$.*

Demonstração. Ver [20]. □

De forma a identificar situações em que o estimador obtido pelo teorema anterior seja um *UMVUE* é útil a definição de estatística completa.

Definição 42. *Uma estatatística $T = T(\mathbf{X})$ di-se completa se e só se a sua família de distribuiçoes for completa. A família de distribuições de $T = T(\mathbf{X})$ diz-se completa se e só se para qualquer estatística $g(T)$,*

$$E[g(T)] = 0 \Rightarrow P[g(T)] = 1, \forall\theta \in \Theta$$

ou seja, T é completa se e só se o único estimador não enviesado de 0, que é função de T, é a estatística identicamente igual a 0 com probabilidade 1.

Diz-se que uma variável aleatória contínua (discreta) tem distribuição que pertence à família exponencial $k-$paramétrica se a respectiva função densidade (função de probabilidade) pode ser expressa na forma

$$f\left(x|\boldsymbol{\theta}\right)=h(x)c\left(\boldsymbol{\theta}\right)e^{\sum_{i=1}^{k}w_i(\boldsymbol{\theta})t_i(x)}$$

onde $h(x)\geq 0, t_1(x),...,t_k(x)$ são funções que não dependem de $\boldsymbol{\theta}$, $c\left(\boldsymbol{\theta}\right)\geq 0$ e $w_1\left(\boldsymbol{\theta}\right),...,w_k\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ são funções que não dependem de x.

Um resultado importante para verificar se um conjunto de estatísticas é conjuntamente suficiente e completa é o Teorema seguinte.

Teorema 68. *Se a distribuição de* $\mathbf{X}$ *pertence à família exponencial* s*-paramétrica e o espaço paramétrico* Θ *contém um rectângulo de dimensão* s *(ou se contém o produto cartesiano de* s *intervalos não degenerados) então as estatísticas* $T_i(\mathbf{X}),\ i=1,...,k$ *são conjuntamente suficientes e completas.*

Demonstração. Ver [51]. □

Apresenta-se um resultado que permite verificar estimadores *UMVUE*.

Teorema 69. *(Blackwell-Lehmann-Scheffé) Se* $T_1,...,T_k$ *são estatísticas conjuntamente suficientes e completas e* $T'=T'\left(T_1,...,T_k\right)$ *é um estimador não enviesado para* $g\left(\theta\right)$ *então* $T^*=\mathbb{E}(T'|T_1,...,T_k)$ *é um UMVUE para* $g\left(\theta\right)$.

Demonstração. Ver [20]. □

D. REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

Apesar de ser bastante conhecido e estudado considerou-se importante incluir uma "breve"exposição sobre o modelo de regressão linear múltipla.

D.1 Modelo e hipóteses

Dá-se o nome de regressão linear a modelos que exprimem relações entre uma variável resposta e uma variável explicativa - modelo de regressão linear simples - ou entre uma variável resposta e várias variáveis explicativas - modelo de regressão linear múltipla, que são caracterizados pela linearidade relativamente aos parâmetros, isto é, os que assumem a forma

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i \ , \ (i = 1, ..., n) \tag{D.1}$$

onde Y_i representa a i-ésima observação da variável dependente ou da variável resposta, x_{ij} corresponde à observação i da variável independente ou explicativa j (regressor), $\beta_1, ..., \beta_k$ representam os coeficientes de regressão (parâmetros fixos e desconhecidos) e ϵ_i representa o erro aleatório associado à observação i. As n igualdades (D.1) podem apresentar-se utilizando a notação matricial,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{D.2}$$

onde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \; e \; \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{X}$ designa-se por matriz do modelo. Caso a variável x_1 seja identicamente igual a 1 tem-se o modelo linear com termo independente e nesse caso a primeira coluna da matriz $\mathbf{X}$ é constituída por uns. Assume-se que $n > k$ e que

$$car(\mathbf{X}) = \ell \leq k.$$

Se $car(\mathbf{X}) = k$ significa que os vectores coluna da matriz $\mathbf{X}$ são linearmente independentes. Quando tal não acontece, ou seja, se $car(\mathbf{X}) < k$, diz-se que existe multicolinearidade. Assume-se também que as variáveis aleatórias $\boldsymbol{\epsilon}_i$ têm valor médio nulo, variância igual a σ^2, (geralmente designada por hipótese da homocedasticidade) são não correlacionadas, e normalmente distribuídas,

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right). \tag{D.3}$$

Contudo existem situações práticas em que as variáveis aleatórias $\boldsymbol{\epsilon}_i$ podem estar correlacionadas e/ou não se verificar a hipótese de homocedasticidade. Isto significa que a matriz $\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}]$ pode não ser diagonal e/ou ter elementos principais distintos, ou seja,

$$\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}] = \sigma^2 \mathbf{V} \tag{D.4}$$

onde $\mathbf{V}$ é uma matriz, de ordem n, conhecida e definida positiva. Nesta situação de forma a obter-se um modelo que verifique as hipóteses da homocedasticidade e de não correlacionamento o modelo (D.2) é transformado no modelo[1]

$$\mathbf{Y}_* = \mathbf{X}_* \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}_*$$

[1] Como o vector $\boldsymbol{\beta}$ é o mesmo nas duas formulações dispensa-se a notação $\boldsymbol{\beta}_*$.

onde $\mathbf{Y}_* = \mathbf{G}'\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}_* = \mathbf{G}'\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\epsilon}_* = \mathbf{G}'\boldsymbol{\epsilon}$ e $\mathbf{G}$ é uma matriz, de ordem n, regular, tal que,

$$\mathbf{G}'\mathbf{V}\mathbf{G} = \mathbf{I}_n \tag{D.5}$$

pelo que,

$$\boldsymbol{\epsilon}_* \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$$

e consequentemente

$$\mathbf{Y}_* \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{X}_*\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right).$$

Em particular $\mathbf{G}_0 = \mathbf{P}\mathbf{D}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ é uma solução da equação (D.5) onde $\mathbf{D}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ é a matriz diagonal com elementos principais $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$, onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os valores próprios da matriz $\mathbf{V}$ e $\mathbf{P}$ a matriz cujas colunas correspondem aos vectores próprios ortonormados associados aos valores próprios da matriz $\mathbf{V}$.

D.2 Estimação dos parâmetros do modelo

Tendo em conta o modelo e as hipóteses consideradas na secção anterior os parâmetros deconhecidos são $\beta_1, ..., \beta_k, \sigma^2$. O método geralmente utilizado para estimar $\boldsymbol{\beta}$ é o método dos mínimos quadrados que consiste em minimizar a soma

$$\left\|\mathbf{Y}_* - \mathbf{X}_*\boldsymbol{\beta}\right\|^2.$$

Atendendo a (A.1) a solução é dada pela projecção ortogonal de $\mathbf{Y}_*$ em $R(\mathbf{X}_*)$, ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{X}_*\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}_*\left(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*\right)^+\mathbf{X}_*'\mathbf{Y}_* & car(\mathbf{X}_*) = \ell < k \\ \mathbf{X}_*\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}_*\left(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*\right)^{-1}\mathbf{X}_*'\mathbf{Y}_* & car(\mathbf{X}_*) = k \end{cases} \tag{D.6}$$

onde

$$\mathbf{Q}_{R(\mathbf{X}_*)} = \begin{cases} \mathbf{X}_*\left(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*\right)^+\mathbf{X}_*' & car(\mathbf{X}_*) = \ell < k \\ \mathbf{X}_*\left(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*\right)^{-1}\mathbf{X}_*' & car(\mathbf{X}_*) = k \end{cases}$$

é a matriz de projecção ortogonal sobre o subespaço $R(\mathbf{X}_*)$ e $(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^+$ é a inversa de *Moore-Penrose* da matriz $\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*$. A solução do sistema (D.6) é dada por

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{cases} (\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^+ \mathbf{X}_*'\mathbf{Y}_* & car(\mathbf{X}_*) = \ell < k \\ (\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1} \mathbf{X}_*'\mathbf{Y}_* & car(\mathbf{X}_*) = k \end{cases} \tag{D.7}$$

Quando $car(\mathbf{X}_*) = \ell < k$ a solução do sistema não é única, mas em determinadas condições, combinações lineares das componentes de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ podem ser únicas, [23], [24] ou [45]. Desta forma é necessária a exposição que se segue.

Definição 43. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma matriz de ordem* $s \times k$*. O vector* $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ *é estimável se e só se existe uma matriz* $\mathbf{W}$*, de ordem* $s \times n$*, tal que,*

$$\mathbb{E}[\mathbf{W}\mathbf{Y}] = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta},$$

ou seja, se existe um estimador não enviesado, $\mathbf{W}\mathbf{Y}$*, para* $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$*.*

Teorema 70. *O vector* $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ *é estimável se e só se os vectores linha da matriz* $\mathbf{C}$ *pertencerem a* $R(\mathbf{X}_*')$*.*

Demonstração. Ver [24] ou [44]. □

Apesar de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ não ser um estimador não enviesado para $\boldsymbol{\beta}$, pois

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right] = (\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^+ (\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Q}_{R(\mathbf{X}_*')}\boldsymbol{\beta} \tag{D.8}$$

se o vector $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ for estimável já se verifica

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right] = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}.$$

Tendo em conta a hipótese assumida da normalidade verifica-se que

$$\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{C}(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^+\mathbf{C}'\right)$$

com $\mathbb{V}\left[\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right] = \sigma^2 \mathbf{C} \left(\mathbf{X}_*' \mathbf{X}_*\right)^+ \mathbf{C}'$.

Quando $car(\mathbf{X}) = k$ tem-se $R(\mathbf{X}') = \mathbb{R}^k$, a solução (D.7) é única e qualquer sua combinação linear de $\boldsymbol{\beta}$ é estimável. Verifica-se que,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \left(\mathbf{X}_*' \mathbf{X}_*\right)^{-1}\right)$$

e,

$$\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{C} \left(\mathbf{X}_*' \mathbf{X}_*\right)^{-1} \mathbf{C}'\right).$$

Teorema 71. *Se* $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ *é estimável então* $\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ *é um BLUE para* $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$, *onde* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ *é dado por (D.7).*

Demonstração. ver [23] ou [24]. □

Uma vez determinado o estimador dos coeficientes de regressão podem definir-se os respectivos resíduos e_{i_*} por

$$\mathbf{e}_* = \mathbf{Y}_* - \widehat{\mathbf{Y}}_*$$

onde $\widehat{\mathbf{Y}}_* = \mathbf{X}_* \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Q}_{R(\mathbf{X}_*)} \mathbf{Y}_*$. O modelo ajustado tem a forma

$$\widehat{\mathbf{Y}}_* = \mathbf{X}_* \widehat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Usando $\mathbf{Q}_{R^\perp(\mathbf{X}_*)} = \mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_{R(\mathbf{X}_*)}$ e (D.2) pode-se escrever $\mathbf{e}_*$ em termos de $\mathbf{Y}_*$ ou de $\boldsymbol{\epsilon}_*$

$$\mathbf{e}_* = \mathbf{Q}_{R^\perp(\mathbf{X}_*)} \mathbf{Y}_* = \mathbf{Q}_{R^\perp(\mathbf{X}_*)} \boldsymbol{\epsilon}_*.$$

Verifica-se que

$$\mathbf{e}_* \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{Q}_{R^\perp(\mathbf{X}_*)}\right). \tag{D.9}$$

Considere-se a soma dos quadrados dos resíduos (SQRE)

$$\begin{aligned} SQRE &= \|\mathbf{e}_*\|^2 = \mathbf{e}_*' \mathbf{e}_* \\ &= \mathbf{Y}_*' \mathbf{Q}_{R^\perp(\mathbf{X}_*)} \mathbf{Y}_* = \mathbf{Y}_*' \mathbf{Y}_* - \mathbf{Y}_*' \mathbf{X}_* \widehat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \boldsymbol{\epsilon}'_* \mathbf{Q}_{R^\perp(\mathbf{X}_*)} \boldsymbol{\epsilon}_*. \end{aligned}$$

Por (D.9), dado que $car\left(\mathbf{Q}_{R^{\perp}(\mathbf{X}_*)}\right) = n - \ell$, verifica-se que

$$SQRE \sim \sigma^2 \chi^2_{n-\ell}$$

pelo que

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{SQRE}{n-\ell} \tag{D.10}$$

é um estimador não enviesado para σ^2.

Como $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{G}\mathbf{G}'$, ver [23] verifica-se que

$$\begin{cases} \mathbf{X}_*'\mathbf{X}_* = (\mathbf{G}'\mathbf{X})'(\mathbf{G}'\mathbf{X}) = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}_*'\mathbf{Y}_* = (\mathbf{G}'\mathbf{X})'(\mathbf{G}'\mathbf{Y}) = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}_*'\mathbf{Y}_* = (\mathbf{G}'\mathbf{Y})'(\mathbf{G}'\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}_*'\mathbf{X}_* = (\mathbf{G}'\mathbf{Y})'(\mathbf{G}'\mathbf{X}) = \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} \end{cases}$$

Assim é possível reescrever $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbb{V}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]$ e $SQRE$ em termos do modelo inicial, não dependendo as novas expressões da matriz $\mathbf{G}$,

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^+ \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \\ \mathbb{V}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right] = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^+ \\ SQRE = \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \end{cases}$$

D.3 Inferência sobre os parâmetros do Modelo

Continuando a admitir que $\boldsymbol{\epsilon}_* \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$ e atendendo a (D.8) e a (**??**) obtém-se

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^+ \left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^+\right). \tag{D.11}$$

Verifica-se ainda que

$$SQE = \mathbf{e}_*'\mathbf{e}_* \sim \sigma^2\chi^2_{n-\ell} \tag{D.12}$$

e também que $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ e SQE são independentes, ver [23] ou [24]. Utilizando o teorema da factorização (ver anexo) conclui-se facilmente que $\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, SQE\right)$ são estatísticas conjuntamente suficientes.

Considere-se uma matriz $\mathbf{C}$, de ordem $s \times k$ e admita-se, até ao final desta secção, que $\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é um vector estimável. Então

$$\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^+ \mathbf{C}'\right) \tag{D.13}$$

logo

$$Q = \left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{Ca}\right)' \left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^+ \mathbf{C}'\right)^+ \left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{Ca}\right) \sim \sigma^2 \chi^2_{h,\delta} \tag{D.14}$$

com parâmetro de não centralidade

$$\delta = \frac{(\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Ca})' \left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^+ \mathbf{C}'\right)^+ (\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Ca})}{\sigma^2} \tag{D.15}$$

onde $\mathbf{Ca}$ é um vector de ordem $s \times 1$ e $car\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^+ \mathbf{C}'\right) = h$. Como $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é independente de SQE o mesmo acontece com $\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ e com Q, pelo que

$$\mathcal{F} = \frac{n - \ell}{h} \frac{Q}{SQE} \sim F_{h,n-\ell,\delta}.$$

Em particular para $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Ca}$ obtém-se

$$Q_0 = \left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\right)' \left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^+ \mathbf{C}'\right)^+ \left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\right) \sim \sigma^2 \chi^2_h$$

e portanto

$$\mathcal{F}_0 = \frac{n - \ell}{h} \frac{Q_0}{SQE} \sim F_{h,n-\ell}. \tag{D.16}$$

Os resultados apresentados permitem obter regiões de confiança e formular testes de hipóteses relativamente aos parâmetros do modelo. Seja $f_{h,n-\ell,1-\alpha}$ o quantil da distribuição F central com h e $n-\ell$ graus de liberdade para a probabilidade $1-\alpha$. Atendendo a (D.16)

$$\mathbb{P}[\mathcal{F}_0 \leq f_{h,n-\ell,1-\alpha}] = \mathbb{P}\left[Q_0 \leq h f_{h,n-\ell,1-\alpha}\frac{SQE}{n-\ell}\right] = 1-\alpha$$

determinando a desigualdade

$$Q_0 \leq h f_{h,n-\ell,1-\alpha}\frac{SQE}{n-\ell} \tag{D.17}$$

uma região de confiança para $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$. Em particular se se verificar $\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{+}\mathbf{C}'\right)^{+} = \left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{+}\mathbf{C}'\right)^{-1}$ tem-se um elipsóide de confiança para $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ com grau de confiança $1-\alpha$, ver [44].

Admita-se que além de serem estimáveis as componentes de $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ são funções linearmente independentes [2]. O teste de hipóteses

$$H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}\mathbf{a} \tag{D.18}$$

utiliza (D.16) rejeitando-se H_0 se e só se o elipsóide de confiança (D.17) não cobrir $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{A}\mathbf{c}$, ou seja, rejeita-se H_0 se e só se

$$Q_0 > h f_{h,n-\ell,1-\alpha}\frac{SQE}{n-\ell}. \tag{D.19}$$

Utilizando (D.17) pode-se obter um intervalo de confiança para uma função estimável $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$. Tirando partido da relação entre as distribuições t e F tem-se

$$T = \frac{\mathbf{a}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\frac{SQE}{n-\ell}\mathbf{a}'\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{+}\mathbf{a}}} \sim t_{n-\ell} \tag{D.20}$$

e neste caso o elipsóide de confiança reduz-se ao intervalo de confiança bilateral

$$\left[\mathbf{a}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-\ell,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{SQE}{n-\ell}\mathbf{a}'\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{+}\mathbf{a}}; \mathbf{a}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-\ell,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{SQE}{n-\ell}\mathbf{a}'\left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{+}\mathbf{a}}\right]$$

[2] Se as componentes de $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ são linearmente independentes significa que as linhas da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes.

onde $t_{n-\ell,1-\frac{\alpha}{2}}$ representa o quantil da distribuição t com $n-\ell$ graus de liberdade para a pobabilidade $1-\frac{\alpha}{2}$. Os testes de hipóteses para $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$ utilizam a estatística de teste (D.20) rejeitando-se H_0 no teste

$$H_0 : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} = \mathbf{a}'\mathbf{c} \;\; vs \;\; H_1 : \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{a}'\mathbf{c} \tag{D.21}$$

se e só se $|T| > t_{n-\ell,1-\frac{\alpha}{2}}$. Com as devidas alterações constroem-se os intervalos de confiança unilaterais para $\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ e os respectivos testes de hipóteses.

Caso $car(\mathbf{X}) = k$ tem-se $R(\mathbf{X}') = \mathbb{R}^k$ podendo construir-se elipsóides de confiança para testar hipóteses relativas a qualquer vector $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$, qualquer que seja a matriz $\mathbf{A}$.

Os resultados (D.10) e (D.12) permitem construir intervalos de confiança e realizar testes de hipóteses sobre o parâmetro σ^2. Sendo $\chi^2_{n-\ell;1-\frac{\alpha}{2}}$ e $\chi^2_{n-\ell;\frac{\alpha}{2}}$ os quantis da distribuição qui-quadrado com $n-\ell$ graus de liberdade, para a probabilidade $1-\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\alpha}{2}$ respectivamente, tem-se o intervalo de confiança para σ^2, para um grau de confiança $1-\alpha$

$$\left[\frac{SQE}{\chi^2_{n-\ell;1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{SQE}{\chi^2_{n-\ell;\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

Petendendo-se testar as hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

rejeita-se a hipótese nula se e só se

$$\frac{SQE}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-\ell;\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } \frac{SQE}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-\ell;1-\frac{\alpha}{2}}$$

Com as devidas alterações constroem-se os intervalos de confiança unilaterais para σ^2 e os respectivos testes de hipóteses.

É importante referir o caso em que $\mathbb{V}[\boldsymbol{\epsilon}] = \sigma^2\mathbf{I}_n$ e $car\,(\mathbf{X}) = k$. A hipótese sobre a característica da matriz garante que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ é regular tendo-se $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^+ = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Neste caso a solução única do sistema (D.6) é

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

com

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right).$$

Tem-se também que

$$SQE \sim \sigma^2\chi^2_{n-k}$$

e

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{SQE}{n-k}.$$

E. EXEMPLO

Este anexo apresenta resultados que são utilizados em exemplos que são apresentados ao longo do texto.

E.1 Vectores de $G^3_{[3]}$

Se $p = N = 3$, então $G_{[3]} = \{0, 1, 2, 3\}$. O espaço linear $G^3_{[3]}$ é constituído por $3^3 = 27$ vectores que se apresentam na tabela seguinte.

	0			1			2		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	(0,0,0)	**(0,0,1)**	(0,0,2)	**(0,1,0)**	**(0,1,1)**	**(0,1,2)**	(0,2,0)	(0,2,1)	(0,2,2)
1	**(1,0,0)**	**(1,0,1)**	**(1,0,2)**	**(1,1,0)**	**(1,1,1)**	**(1,1,2)**	**(1,2,0)**	**(1,2,1)**	**(1,2,2)**
2	(2,0,0)	(2,0,1)	(2,0,2)	(2,1,0)	(2,1,1)	(2,1,2)	(2,2,0)	(2,2,1)	(2,2,2)

Tab. E.1: Vectores de $G^3_{[3]}$

Os vectores dos coeficientes das aplicações reduzidas de $\mathcal{L}^3_{r[3]}$ estão a *bold* de forma a facilitar a identificação das respectivas aplicações.

Utilizando (4.8) os vectores de $G^3_{[3]}$ ficam ordenados como se apresenta na tabela seguinte.

	0			1			2		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_{10}$	$\mathbf{x}_{19}$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_{13}$	$\mathbf{x}_{22}$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_{16}$	$\mathbf{x}_{25}$
1	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_{11}$	$\mathbf{x}_{20}$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_{14}$	$\mathbf{x}_{23}$	$\mathbf{x}_8$	$\mathbf{x}_{17}$	$\mathbf{x}_{26}$
2	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_{12}$	$\mathbf{x}_{21}$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_{15}$	$\mathbf{x}_{24}$	$\mathbf{x}_9$	$\mathbf{x}_{18}$	$\mathbf{x}_{27}$

Tab. E.2: Ordem dos vectores de $G^3_{[3]}$

E.2 Aplicações lineares de $\mathcal{L}^3_{[3]}$

Em $\mathcal{L}^3_{[3]}$ existem $3^3 = 27$ aplicações lineares, das quais, $m = \frac{3^3-1}{3-1} = 13$ são reduzidas.

aplicações reduzidas de $\mathcal{L}^3_{[3]}$	aplicações de $\mathcal{L}^3_{[3]}$ não reduzidas
	$\ell_{\mathbf{0}}$
x_1	$2x_1$
x_2	$2x_2$
$x_1 + x_2$	$2x_1 + 2x_2$
$x_1 + 2x_2$	$2x_1 + x_2$
x_3	$2x_3$
$x_1 + x_3$	$2x_1 + 2x_3$
$x_2 + x_3$	$2x_2 + 2x_3$
$x_1 + x_2 + x_3$	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3$
$x_1 + 2x_2 + x_3$	$2x_1 + x_2 + 2x_3$
$x_1 + 2x_3$	$2x_1 + x_3$
$x_2 + 2x_3$	$2x_2 + x_3$
$x_1 + x_2 + 2x_3$	$2x_1 + 2x_2 + x_3$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3$	$2x_1 + x_2 + x_3$

Tab. E.3: Aplicações de $\mathcal{L}^3_{[3]}$

E.3 Matrizes associadas a aplicações de $\mathcal{L}^3_{r[3]}$

Nesta secção indicam-se matrizes associadas, a algumas aplicações de $\mathcal{L}^3_{r[3]}$. Tendo em conta as tabelas

$\ell(\mathbf{x}) = x_1$	0			1			2		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

$\ell(\mathbf{x}) = x_2$	0			1			2		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
2	0	0	0	1	1	1	2	2	2

$\ell(\mathbf{x}) = x_3$	0			1			2		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

$\ell(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$	0			1			2		
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	0	0	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	2	2	2
2	2	2	2	1	1	1	0	0	0

e por (4.11) obtêm-se as matrizes $\mathbf{C}(x_1)$, $\mathbf{C}(x_2)$, $\mathbf{C}(x_3)$ e $\mathbf{C}(x_1+2x_2)$, do tipo 3×27, cujas colunas estão associadas aos vectores de $G^3_{[3]}$, ordenados como se apresenta na tabela E.2.

$$\mathbf{C}(x_1) = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(x_2)= \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(x_3)= \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(x_1+2x_2)= \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

F. DISTRIBUIÇÕES GAMA, GAMA INTEIRA GENERALIZADA E GAMA QUASE-INTEIRA GENERALIZADA

F.1 Distribuição Gama

Se a variável aleatória X tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x} x^{r-1}, \ x > 0$$

diz-se que X tem distribuição Gama com parâmetro de forma $r > 0$ e taxa $\lambda > 0$ e representa-se por

$$X \sim \Gamma(r, \lambda).$$

F.2 Distribuição Gama Inteira Generalizada

Sejam $X_1, ..., X_p$ variáveis aleatórias independentes com

$$X_j \sim \Gamma(r_j, \lambda_j), \quad r_j \in \mathbb{N}, \ \lambda_j \in \mathbb{R}^+ \ (j = 1, ..., p)$$

com $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i, j = 1, ..., p$. Então a variável aleatória

$$Y = \sum_{j=1}^{p} X_j$$

tem distribuição Gama Inteira Generalizada (GIG) de profundidade p, com parâmetros de forma r_j e taxas λ_j, $j = 1, ..., p$, ver [6]. Simbolicamente

$$Y \sim GIG(r_1, ..., r_p; \lambda_1, ..., \lambda_p; p).$$

A função densidade e a função de distribuição de Y são dadas, para $y > 0$, respectivamente por,

$$f_Y^{GIG}\left(y|r_1,...,r_p;\lambda_1,...,\lambda_p;p\right) = K\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{r_j} c_{jk}y^{k-1}\right)e^{-\lambda_j y}$$

e

$$F_Y^{GIG}\left(y|r_1,...,r_p;\lambda_1,...,\lambda_p;p\right) = 1 - K\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{r_j} c_{jk}(k-1)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{y^i}{i!\lambda_j^{k-i}}\right)e^{-\lambda_j y}$$

onde K é dado por (5) em [6] e c_{jk} são dados por (11)-(13) na mesma referência.

F.3 Distribuição Gama Quase-Inteira Generalizada

Sejam Y e X variáveis aleatórias independentes, tais que,

$$Y \sim GIG\left(r_1,...,r_p;\lambda_1,...,\lambda_p;p\right) \ \ e \ X \sim \Gamma\left(r,\lambda\right)$$

com $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ e $\lambda \neq \lambda_j$ para todo $j \in \{1,...,p\}$. Então a variável aleatória

$$W = Y + X$$

tem distribuição Gama Quase-Inteira Generalizada (GNIG) de profundidade $p+1$, ver [5],

$$W \sim GNIG\left(r,r_1,...,r_p;\lambda,\lambda_1,...,\lambda_p;p+1\right).$$

A função densidade e a função de distribuição de W são dadas, para $w > 0$, respectivamente por,

$$\begin{aligned}&f_W^{GIG}\left(w|r_1,...,r_p,r;\lambda_1,...,\lambda_p,\lambda;p+1\right) = \\ &= K\lambda^r\sum_{j=1}^{p}e^{-\lambda_j w}\sum_{k=1}^{r_j}\left(c_{jk}\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+r)}w^{k+r-1}{}_1F_1\left(r,k+r,-(\lambda-\lambda_j)w\right)\right)\end{aligned}$$

e

$$F_W^{GIG}(w|r_1,...,r_p,r;\lambda_1,...,\lambda_p,\lambda;p+1) = \frac{\lambda^r w^r}{\Gamma(r+1)}{}_1F_1(r,r+1,-\lambda w)$$
$$-K\lambda^r \sum_{j=1}^{p} e^{-\lambda_j w} \sum_{k=1}^{r_j} c_{jk}^* \sum_{i=0}^{k-1} \frac{w^{r+i}\lambda_j^i}{\Gamma(r+1+i)} {}_1F_1(r,k+r,-(\lambda-\lambda_j)w)$$

onde K é dado por (5) em [6] e $c_{jk} = \frac{c_{jk}}{\lambda_j^k}\Gamma(k)$ com c_{jk} dados por (11)-(13) na mesma referência.

Se $r \in \mathbb{N}$ a distribuição GNIG de profundidade $p+1$ reduz-se a uma disribuição GIG de profundidade $p+1$. Pode-se considerar a distribuição GNIG como uma generalização da distribuição GIG.

F.4 Misturas de Distribuições

Diz-se que a distribuição da variável aleatória contínua X é uma mistura com k componentes se a sua função densidade $f_X(x)$ puder ser escrita na forma

$$f_X(x) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j f_j(x)$$

onde $f_j(x)$ são as funções densidade componentes da mistura e π_j os pesos da mistura, com $\sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$ e $0 < \pi_j < 1,\ j = 1,...,k$.